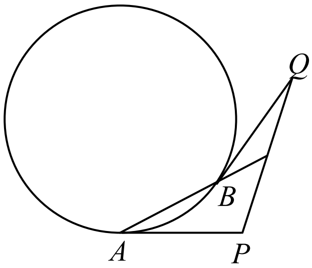
Solusi Pengayaan Matematika
Edisi 9

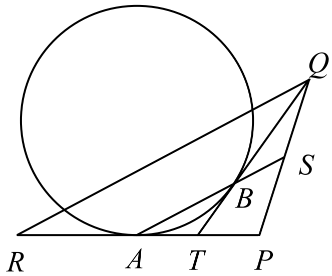
Nomor Soal: 81-90

81. Dari titik A dan B pada lingkaran, garis singgung AP dan BQ digambarkan sama, seperti diperlihatkan pada gambar. Buktikan bahwa AB membagi PQ sama panjang.



Solusi:

Perpanjang PA sampai ke R, sehingga $PA = AR$. Perpanjang AB sampai memotong PQ di titik S. Perpanjang QB sampai memotong PR di titik T.



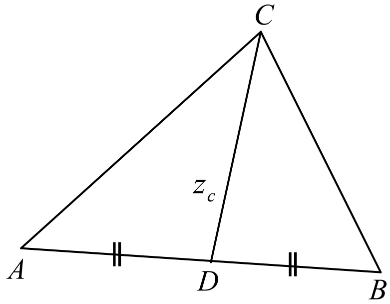
Karenanya $TB = TA$ (garis singgung dari titik T) dan $\angle BAT = \angle ABT$. Sehingga $BQ = AP = AR$, $TR = TQ$.

Dari sini $BA \parallel QR$, karena itu A adalah titik tengah RP, S adalah titik tengah QP. (qed)

82. Sisi-sisi sebuah segitiga sama dengan tiga bilangan bulat beraturan. Garis berat dari titik sudut terbesar adalah $\sqrt{74\frac{1}{2}}$. Hitunglah luas segitiga tersebut.

Solusi:

Misalnya $BC = a = p - 1$, $AC = b = p$, dan $AB = c = p + 1$. Rumus Garis Berat dalam ΔABC yang ditarik dari C ke sisi AB dirumuskan sebagai:



$$z_c^2 = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{4}c^2$$

$$\left(\sqrt{74\frac{1}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}(p-1)^2 + \frac{1}{2}p^2 - \frac{1}{4}(p+1)^2$$

$$74\frac{1}{2} = \frac{1}{2}(p-1)^2 + \frac{1}{2}p^2 - \frac{1}{4}(p+1)^2$$

$$298 = 2p^2 - 4p + 2 + 2p^2 - p^2 - 2p - 1$$

$$3p^2 - 6p - 297 = 0$$

$$p^2 - 2p - 99 = 0$$

$$(p-11)(p+9) = 0$$

$p = 11$ (diterima) atau $p = -9$ (ditolak)

$$a = p - 1 = 11 - 1 = 10$$

$$b = p = 11$$

$$c = p + 1 = 11 + 1 = 12$$

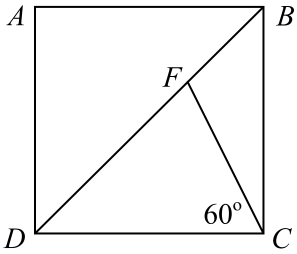
Menurut Heron:

luas ΔABC adalah $L = [ABC] = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, dengan $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ adalah setengah keliling ΔABC.

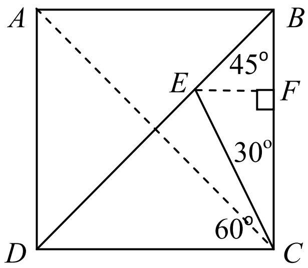
$s = \frac{1}{2}(10+11+12) = \frac{33}{2}$ cm

$\therefore\ L = \sqrt{\frac{33}{2}\left(\frac{33}{2}-10\right)\left(\frac{33}{2}-11\right)\left(\frac{33}{2}-12\right)} = \sqrt{\frac{33}{2}\left(\frac{13}{2}\right)\left(\frac{11}{2}\right)\left(\frac{9}{2}\right)} = \frac{33}{4}\sqrt{39}$ satuan luas

83. Diberikan persegi $ABCD$, dengan AB = 10 cm dan $\angle DCE = 60^\circ$. Hitunglah luas ΔBEC.



Solusi:



$\angle BCE = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$

$\angle CBE = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$

$BF = EF$

$CF = EF\sqrt{3}$

$BF + CF = BC$

$BF + EF\sqrt{3} = 8$

$BF\left(1+\sqrt{3}\right) = 8$

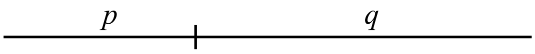
$BF = \frac{8}{1+\sqrt{3}}$

$\therefore$ luas $\Delta BEC = \frac{1}{2}BC \times EF = \frac{1}{2} \times 8 \times \frac{8}{1+\sqrt{3}} = \frac{32}{1+\sqrt{3}}$ cm^2

84. Sebuah segmen garis yang panjangnya 100 cm dibagi atas dua bagian. Rasio yang pendek terhadap yang panjang sama dengan rasio yang panjang terhadap segmen garis itu seluruhnya. Carilah bagian-bagian itu.

Solusi:

Perhatikan gambar di bawah ini.



$p + q = 100$

Segmen garis yang pendek = p, maka segmen garis yang panjang = q = $(100 - p)$.

$p : q = q : (p+q)$

$p : (100-p) = (100-p) : 100$

$100p = (100-p)^2$

$100p = 10000 - 200p + p^2$

$p^2 - 300p + 10000 = 0$

$$p=\frac{-(-300)\pm\sqrt{(-300)^2-4\cdot1(10000)}}{2\cdot1}=\frac{300\pm\sqrt{90000-40000}}{2}=\frac{300\pm\sqrt{50000}}{2}$$

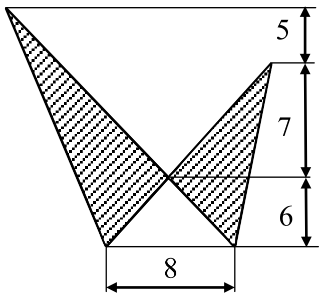
$$=\frac{300\pm100\sqrt{5}}{2}=150\pm50\sqrt{5}$$

$p=150+50\sqrt{5}$ (ditolak) $p=150-50\sqrt{5}$ (diterima)

$q=100-p=100-150+50\sqrt{5}=-50+50\sqrt{5}$

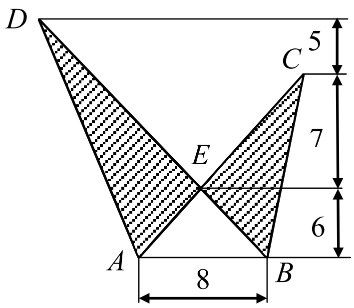
Jadi, panjang segmen garis yang pendek adalah $\left(150-50\sqrt{5}\right)$ cm dan panjang segmen garis yang panjang adalah $\left(-50+50\sqrt{5}\right)$ cm.

85. Tentukan keseluruhan luas dari daerah yang diarsir pada gambar itu.



Solusi:

Keseluruhan luas dari daerah yang diarsir pada gambar itu adalah



$L=L\Delta AED+L\Delta BCE$

$=(L\Delta ABD-L\Delta ABE)+(L\Delta ABC-L\Delta ABE)$

$=\left(\frac{1}{2}\times8\times18-\frac{1}{2}\times8\times6\right)+\left(\frac{1}{2}\times8\times13-\frac{1}{2}\times8\times6\right)$

$=(72-24)+(52-24)$

$=48+28$

$=76$ satuan luas

86. Perhatikan jarum jam kinetik, pada jam berapa antara jam 10 dan 11 jarum pendek dan jarum panjang membentuk sudut 90°?

Solusi:

Jarum menit berputar dengan kecepatan 360° per jam.

Jarum jam berputar dengan kecepatan 30° per jam.

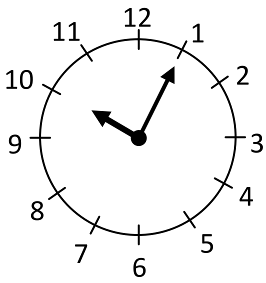
Pada jam 10.00 sudut antara kedua jarum (jarum jam dan menit) adalah 60°.

Besar sudut antara jarum jam dan jarum menit setelah t jam adalah

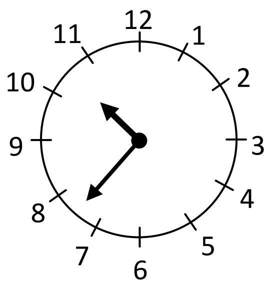
$(60+360t)^\circ-30t^\circ=60^\circ-330t^\circ$

Kedua jarum membentuk sudut 90° pada dua posisi, yaitu:

(a)



(b)

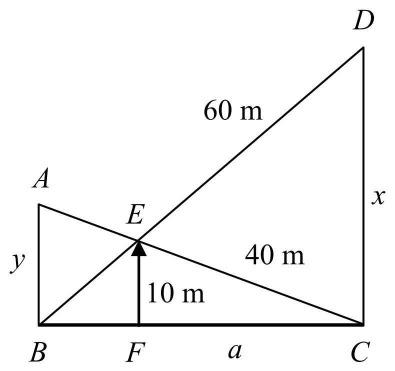


Untuk $60^\circ - 330t^\circ = 90^\circ$, diperoleh $t = \frac{1}{11}$ jam.

Untuk $60^\circ - 330t^\circ = 270^\circ$, diperoleh $t = \frac{7}{11}$ jam.

Sehingga sudut kedua jarum siku-siku pada $\frac{1}{11}$ jam atau $5\frac{5}{11}$ menit setelah jam 10.00 atau pukul $10.05\frac{5}{11}$ dan pada $\frac{7}{11}$ jam atau $38\frac{2}{11}$ menit setelah jam 10.00 atau pukul $10.38\frac{2}{11}$.

87. Terdapat dua buah dinding $AB = x$ dan $CD = y$ yang berdiri tegak lurus pada tanah. Dari masing-masing A dibentangkan tali ke bawah dinding C dan dari D dibentangkan tali ke bawah dinding B, sehingga tinggi titik temu kedua tali dari tanah adalah 4 m. Jarak dari titik C dan D masing-masing ke titik temu kedua tali itu adalah 25 m dan 30 m. Buktikan bahwa $x^4 - 20x^3 - 2000x^2 + 40000x - 200000 = 0$.



Solusi:

$$\frac{AB}{BF + CF} = \frac{EF}{CF}$$

$$\frac{EF}{AB} = \frac{CF}{BF + CF} \quad \text{…. (1)}$$

$$\frac{CD}{BF + CF} = \frac{EF}{BF}$$

$$\frac{EF}{CD} = \frac{BF}{BF + CF} \quad \text{…. (2)}$$

Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh:

$$\frac{EF}{AB} + \frac{EF}{CD} = \frac{CF}{BF + CF} + \frac{BF}{BF + CF}$$

$$\frac{EF}{AB} + \frac{EF}{CD} = 1$$

$$\frac{1}{AB} + \frac{1}{CD} = \frac{1}{EF}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{10}$$

$$y = \frac{10x}{x - 10} \quad \text{…. (3)}$$

Dengan menggunakan teorema Pythagoras diperoleh:

$$40^2 - y^2 = (a + b)^2 = 60^2 - x^2 \quad \text{…. (4)}$$

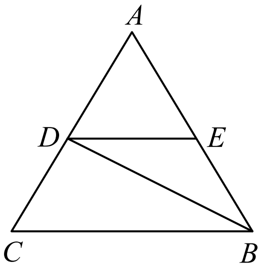
Substitusikan persamaan (3) ke persamaan (4) diperoleh:

$$40^2 - \left(\frac{10x}{x - 10}\right)^2 = 60^2 - x^2$$

$$1600 - \frac{100x^2}{x^2 - 20x + 100} = 3600 - x^2$$

$$x^4 - 20x^3 - 2000x^2 + 40000x - 200000 = 0 \quad \text{(qed)}$$

88. Dalam ΔABC, $\angle CDB = \angle ABC$ dan $DE//CB$. Jika $AB = AC = 2\ BC$, tentukanlah $L\Delta ABC : L\Delta BCD : L\Delta DEB : L\Delta ADE$.



Solusi:

Perhatikan ΔABC dan ΔBDC:

$\angle CDB = \angle ABC$ (diberikan)

$\angle ACB = \angle DCB$ (sudut seletak)

Sehingga $\Delta ABC \sim \Delta BDC$

$BC = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} AC$ (diberikan)

$CD : BC = BC : AB$

$$CD = \frac{BC^2}{AB} = \frac{\left(\frac{1}{2}AB\right)^2}{AB} = \frac{1}{4}AB$$

$$CD = \frac{1}{4}AB = \frac{1}{4}AC$$

$$[BCD] = \frac{1}{2}CD \times t = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}AC \times t = \frac{1}{4}[ABC]$$

Perhatikan ΔADE dan ΔACB:

$\angle ADE = \angle ACB$ (sehadap)

$\angle DAE = \angle BAC$ (sudut seletak)

Sehingga $\Delta ADE \sim \Delta ACB$

$AB = AC = 2\ BC$

$$CD = \frac{1}{4}AB = \frac{1}{4}AC \to AD = \frac{3}{4}AC = \frac{3}{4} \times 2BC = \frac{3}{2}BC$$

$AD : DE = AC : CB$

$$DE = \frac{AD \times CB}{AC} = \frac{AD \times CB}{2CB} = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2}BC = \frac{3}{4}BC$$

$$k = \frac{DE}{BC} = \frac{3}{4}$$

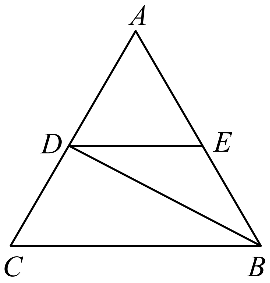
$$[ADE] = k^2 \times [ABC] = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \times [ABC] = \frac{9}{16}[ABC]$$

$$[DEB] = \left\{1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{9}{16}\right)\right\} \times [ABC] = \frac{3}{16}[ABC]$$

$$[ABC]:[BCD]:[DEB]:[ADE] = [ABC]:\frac{1}{4}[ABC]:\frac{3}{16}[ABC]:\frac{9}{16}[ABC]$$

$$= 1 : \frac{1}{4} : \frac{3}{16} : \frac{9}{16} = 16 : 4 : 3 : 9$$

89. Dalam ΔABC, $\angle CDB = \angle ABC$ dan DE // CB. Jika $AB = AC = 3BC$, tentukanlah $[ABC]:[BCD]:[DEB]:[ADE]$.



Solusi:

Perhatikan ΔABC dan ΔBDC:

$\angle CDB = \angle ABC$ (diberikan)

$\angle ACB = \angle DCB$ (sudut seletak)

Sehingga $\Delta ABC \sim \Delta BDC$

$BC = \frac{1}{3}AB = \frac{1}{3}AC$ (diberikan)

$CD : BC = BC : AB$

$$CD = \frac{BC^2}{AB} = \frac{\left(\frac{1}{3}AB\right)^2}{AB} = \frac{1}{9}AB$$

$CD = \frac{1}{9}AB = \frac{1}{9}AC$

$[BCD] = \frac{1}{2}CD \times t = \frac{1}{2} \times \frac{1}{9}AC \times t = \frac{1}{9}[ABC]$

Perhatikan ΔADE dan ΔACB:

$\angle ADE = \angle ACB$ (sehadap)

$\angle DAE = \angle BAC$ (sudut seletak)

Sehingga $\Delta ADE \sim \Delta ACB$

$AB = AC = 2\ BC$

$CD = \frac{1}{9}AB = \frac{1}{9}AC \to AD = \frac{8}{9}AC = \frac{8}{9} \times 3BC = \frac{8}{3}BC$

$AD : DE = AC : CB$

$$DE = \frac{AD \times CB}{AC} = \frac{AD \times CB}{3CB} = \frac{1}{3}AD = \frac{1}{3} \times \frac{8}{3}BC = \frac{8}{9}BC$$

$$k = \frac{DE}{BC} = \frac{8}{9}$$

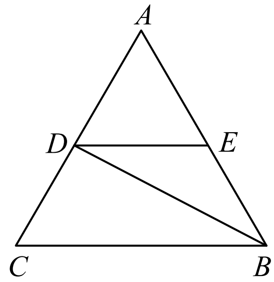
$$[ADE] = k^2 \times [ABC] = \left(\frac{8}{9}\right)^2 \times [ABC] = \frac{64}{81}[ABC]$$

$$[DEB] = \left[1 - \left(\frac{1}{9} + \frac{64}{81}\right)\right] \times [ABC] = \frac{8}{81}[ABC]$$

$$[ABC]:[BCD]:[DEB]:[ADE] = [ABC]:\frac{1}{9}[ABC]:\frac{8}{81}[ABC]:\frac{64}{81}[ABC]$$

$$= 1 : \frac{1}{9} : \frac{8}{81} : \frac{64}{81} = 81 : 9 : 8 : 64$$

90. Dalam ΔABC, $\angle CDB = \angle ABC$ dan $DE \;//\; CB$. Jika $AB = AC = nBC$, tentukanlah $[ABC]:[BCD]:[DEB]:[ADE]$.



Solusi:

Perhatikan ΔABC dan ΔBDC:

$\angle CDB = \angle ABC$ (diberikan)

$\angle ACB = \angle DCB$ (sudut seletak)

Sehingga $\Delta ABC \sim \Delta BDC$

$BC = \frac{1}{n} AB = \frac{1}{n} AC$ (diberikan)

$CD : BC = BC : AB$

$$CD = \frac{BC^2}{AB} = \frac{\left(\frac{1}{n} AB\right)^2}{AB} = \frac{1}{n^2} AB$$

$$CD = \frac{1}{n^2} AB = \frac{1}{n^2} AC$$

$$[BCD] = \frac{1}{2} CD \times t = \frac{1}{2} \times \frac{1}{n^2} AC \times t = \frac{1}{n^2}[ABC]$$

Perhatikan ΔADE dan ΔACB:

$\angle ADE = \angle ACB$ (sehadap)

$\angle DAE = \angle BAC$ (sudut seletak)

Sehingga $\Delta ADE \sim \Delta ACB$

$AB = AC = n\, BC$

$$CD = \frac{1}{n^2} AB = \frac{1}{n^2} AC \rightarrow AD = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) AC = \frac{n^2 - 1}{n^2} \times nBC = \frac{n^2 - 1}{n} BC$$

$AD : DE = AC : CB$

$$DE = \frac{AD \times CB}{AC} = \frac{AD \times CB}{nCB} = \frac{1}{n} AD = \frac{1}{n} \times \frac{n^2 - 1}{n} BC = \frac{n^2 - 1}{n^2} BC$$

$$k = \frac{DE}{BC} = \frac{n^2 - 1}{n^2}$$

$$[ADE] = k^2 \times [ABC] = \left(\frac{n^2 - 1}{n^2}\right)^2 \times [ABC] = \frac{(n^2 - 1)^2}{n^4}[ABC]$$

$$[DEB] = \left[1 - \left(\frac{1}{n^2} + \frac{(n^2 - 1)^2}{n^4}\right)\right] \times [ABC] = \frac{n^2 - 1}{n^4}[ABC]$$

$$[ABC]:[BCD]:[DEB]:[ADE] = [ABC] : \frac{1}{n^2}[ABC] : \frac{n^2 - 1}{n^4}[ABC] : \frac{(n^2 - 1)^2}{n^4}[ABC]$$

$$= 1 : \frac{1}{n^2} : \frac{n^2 - 1}{n^4} : \frac{(n^2 - 1)^2}{n^4} = n^4 : n^2 : (n^2 - 1) : (n^2 - 1)^2$$