

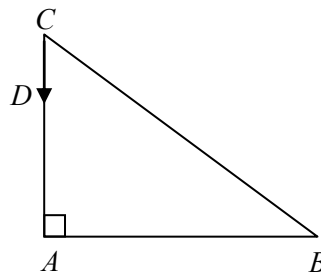
# Solusi Pengayaan Matematika

## Edisi 9

### Nomor Soal: 81-90

81. Perhatikan diagram berikut ini yang menunjukkan denah jalan Cemara di Pagelaran Bogor. Jarak jalan  $DA = 100$  m,  $AB = 200$  m,  $B$  ke  $C$  ke  $D = 300$  m. Jalan  $AC$  dan jalan  $AB$  saling tegak lurus.  $D$  adalah pos keamanan. Berapa jarak pos keamanan  $D$  dari pojok  $C$ ?

- A. 80 m
- B. 75 m
- C. 60 m
- D. 50 m
- E. 48 m



**Solusi: [D]**

Misalnya jarak  $CD = x$  m, maka jarak  $BC = (300 - x)$  m.

Menurut Teorema Pythagoras:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

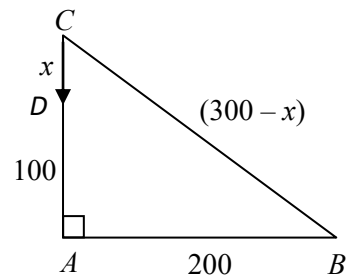
$$(300 - x)^2 = 200^2 + (100 + x)^2$$

$$90.000 - 600x + x^2 = 40.000 + 10.000 + 200x + x^2$$

$$800x = 40.000$$

$$x = 50$$

Jadi, pos keamanan  $D$  dari pojok  $C$  adalah 50 meter.



82. Diberikan  $\triangle ABC$  dengan  $AB = 14$  cm. Lingkaran dalamnya memiliki diameter 8 cm. Jarak dari titik  $A$  ke titik singgungnya adalah 6 cm. Rasio panjang  $AC$  dan  $BC$  adalah ....

- A. 1 : 5
- B. 1 : 3
- C. 3 : 5
- D. 13 : 15
- E. 13 : 14

**Solusi: [D]**

$$r = \frac{1}{2}d = \frac{1}{2} \times 8 = 4 \text{ cm}$$

$$AD = s - a = 6 \text{ cm}$$

$$BD = AB - AD = s - b = 14 - 6 = 8 \text{ cm}$$

$$AF = AD = s - a = 6 \text{ cm}$$

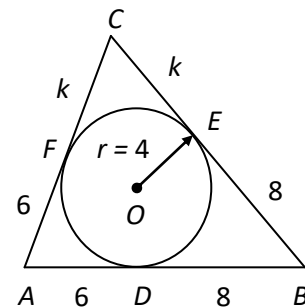
$$BE = BD = s - b = 8 \text{ cm}$$

Ambillah  $CE = CF = s - c = k$ , sehingga

$$AB = c = 14 \text{ cm}$$

$$BC = a = (8 + k) \text{ cm}$$

$$AC = b = (6 + k) \text{ cm}$$



Setengah keliling  $\triangle ABC$  adalah  $s = \frac{1}{2}(a + b + c) = \frac{1}{2}(8 + k + 6 + k + 14) = (k + 14)$  cm

Menurut Heron, luas  $\triangle ABC$  adalah  $[ABC] = L = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ , sehingga

$$L = \sqrt{(k+14)(6)(8)(k)} = \sqrt{(k+14)(6)(8)(k)} = 4\sqrt{3k(k+14)}$$

$$r = \frac{L}{s}$$

$$4 = \frac{4\sqrt{3k(k+14)}}{k+14}$$

$$k+14 = \sqrt{3k(k+14)}$$

$$(k+14)^2 = 3k(k+14)$$

$$(k+14)^2 - 3k(k+14) = 0$$

$$(k+14)(k+14-3k) = 0$$

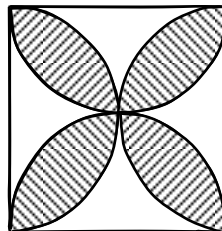
$$(k+14)(-2k+14) = 0$$

$k = -14$  (ditolak) atau  $k = 7$  (diterima).

Jadi,  $AC = 6+k = 6+7 = 13$  cm dan  $BC = 8+k = 8+7 = 15$  cm.

83. Terdapat sebuah persegi dengan panjang sisi 14 cm. Pada masing-masing sisi kita menggambar suatu setengah lingkaran berjari-jari 7 cm dengan pusat pada peretengahan sisi itu. Tentukan luas daerah yang diarsir.

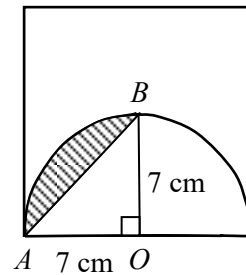
- A.  $72 \text{ cm}^2$
- B.  $96 \text{ cm}^2$
- C.  $102 \text{ cm}^2$
- D.  $108 \text{ cm}^2$
- E.  $112 \text{ cm}^2$



**Solusi: [E]**

Luas tembereng  $AB = \text{Luas juring } AOB - \text{luas } \Delta AOB$

$$\begin{aligned} &= \frac{90^\circ}{360^\circ} \times \frac{22}{7} \times 7^2 - \frac{1}{2} \times 7 \times 7 \\ &= \frac{77}{2} - \frac{49}{2} \\ &= 14 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$



Jadi, luas daerah yang diarsir  $= 8 \times 14 = 112 \text{ cm}^2$ .

84. Sebidang tanah berbentuk persegi panjang, luasnya  $288 \text{ m}^2$  jumlah kuadrat sisi-sisinya adalah  $864 \text{ m}^2$ . Berapakah panjang sisi terpendeknya dari tanah itu ?
- A. 8 m
  - B. 10 m
  - C. 12 m
  - D. 16 m
  - D. 24 m

**Solusi: [D]**

Ambillah sisi-sisi persegi panjang itu adalah  $x$  dan  $y$  m.

$$\text{Luasnya} = 288$$

$$xy = 288$$

$$\text{Jumlah kuadrat sisi-sisinya} = 1440$$

$$x^2 + x^2 + y^2 + y^2 = 1440$$

$$x^2 + y^2 = 720$$

$$(x+y)^2 - 2xy = 720$$

Substitusi  $xy = 288$  ke persamaan  $(x+y)^2 - 2xy = 720$ , maka diperoleh

$$(x+y)^2 - 576 = 720$$

$$(x+y)^2 = 1296$$

$$x+y = 36 \rightarrow y = 36 - x \text{ (diterima) atau } x+y = -36 \text{ (ditolak)}$$

Substitusikan  $y = 36 - x$  ke persamaan  $xy = 288$ , maka diperoleh:

$$x(36 - x) = 288$$

$$x^2 - 36x + 288 = 0$$

$$(x - 12)(x - 24) = 0$$

$$x = 12 \text{ atau } x = 24$$

Untuk  $x = 12$ , maka  $y = 24$  atau untuk  $x = 24$ , maka  $y = 12$

Jadi, panjang sisi terpendek sebidang tanah itu adalah 12 meter.

85. Diberikan dua tiang yang berdiri tegak lurus pada tanah tingginya masing-masing 10 m dan 8 m. Dari masing-masing puncaknya dibentangkan tali ke bawah tiang yang lainnya. Berapakah tinggi titik temu kedua utas tali itu dari tanah?

- A.  $7\frac{4}{9}$  m      B.  $6\frac{4}{9}$  m      C.  $5\frac{7}{9}$  m      D.  $5\frac{4}{9}$  m      E.  $4\frac{4}{9}$  m

**Solusi: [E]**

$$\frac{AB}{BF + CF} = \frac{EF}{CF}$$

$$\frac{EF}{AB} = \frac{CF}{BF + CF} \dots (1)$$

$$\frac{CD}{BF + CF} = \frac{EF}{BF}$$

$$\frac{EF}{CD} = \frac{BF}{BF + CF} \dots (2)$$

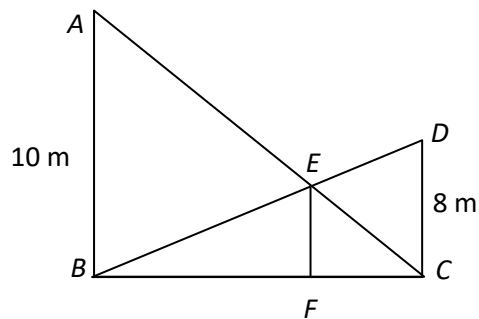
Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh:

$$\frac{EF}{AB} + \frac{EF}{CD} = \frac{CF}{BF + CF} + \frac{BF}{BF + CF}$$

$$\frac{EF}{AB} + \frac{EF}{CD} = 1$$

$$EF = \frac{AB \times CD}{AB + CD} = \frac{10 \times 8}{10 + 8} = 4\frac{4}{9}$$

Jadi, tinggi titik temu kedua utas tali itu adalah  $4\frac{4}{9}$  m.



86. Pada diagram  $O$  adalah pusat dari lingkaran yang berjari-jari  $r$ , dan  $ED = r$ . Jika

$$\angle DEC = \frac{p}{q} \times \angle BOA, \text{ maka nilai } p + q = \dots$$

- A. 8  
B. 7  
C. 6  
D. 4  
E. 3

**Solusi: [D]**

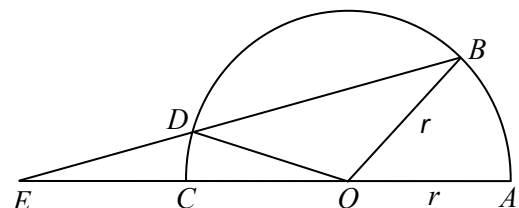
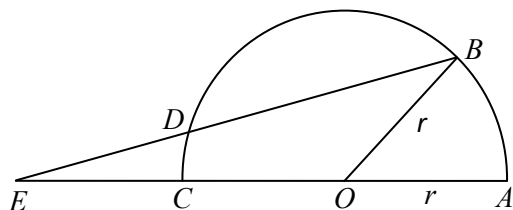
Misalnya  $\angle DEO = \alpha$ .

Karena  $\triangle DEO$  sama kaki, maka  $\angle DOC = \alpha$ .

$$\angle EDO = 180^\circ - 2\alpha.$$

$$\angle BDO = 180^\circ - (180^\circ - 2\alpha) = 2\alpha.$$

Karena  $\triangle BDO$  sama kaki, maka  $\angle DBO = 2\alpha$ .



$$\angle BOD = 180^\circ - (2\alpha + 2\alpha) = 180^\circ - 4\alpha.$$

$$\angle BOA = 180^\circ - (\alpha + 180^\circ - 4\alpha) = 3\alpha$$

$$\angle BOA = 180^\circ - (\alpha + 180^\circ - 4\alpha) = 3\alpha$$

$$\alpha = \frac{1}{3} \angle BOA$$

$$\angle DEC = \frac{1}{3} \angle BOA \text{ ekuivalen dengan } \angle DEC = \frac{p}{q} \times \angle BOA$$

Sehingga  $p=1$  dan  $q=3$ . Karenanya  $p+q=1+3=4$ .

87. Antara pukul 10.30 dan 11.00 jarum panjang dan jarum pendek suatu arloji berimpit pada pukul 10 lebih ....

A.  $54\frac{6}{11}$  menit    B.  $27\frac{6}{11}$  menit    C.  $15\frac{6}{11}$  menit    D.  $5\frac{6}{11}$  menit    E.  $4\frac{6}{11}$  menit

**Solusi: [A]**

Setiap 1 menit, jarum panjang bergerak  $= \frac{360^\circ}{60} = 6^\circ$  dan

jarum pendek bergerak  $= \frac{30^\circ}{60} = 0,5^\circ$ .

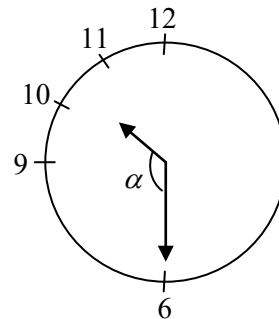
Ambillah kedua jarum berimpit setelah  $x$  menit, sehingga

$$6x = 0,5x + \alpha$$

$$5,5x = 135^\circ$$

$$x = 24\frac{6}{11}$$

Jadi, kedua jarum berimpit pada pukul 10 lebih  $(30 + 24\frac{6}{11}) = 54\frac{6}{11}$  menit.



88. Tiga lingkaran pada gambar bersinggungan satu sama lain. Jika  $r_1 = 9$  dan  $r_2 = 4$ , carilah jari-jari lingkaran paling kecil.

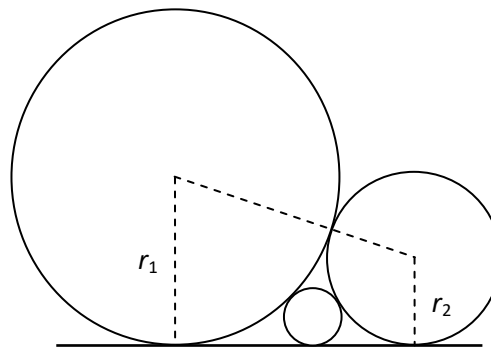
A.  $\frac{31}{25}$

B.  $\frac{32}{25}$

C.  $\frac{33}{25}$

D.  $\frac{34}{25}$

E.  $\frac{36}{25}$



**Solusi: [E]**

Misalnya jari-jari lingkaran kecil  $x$ , sehingga

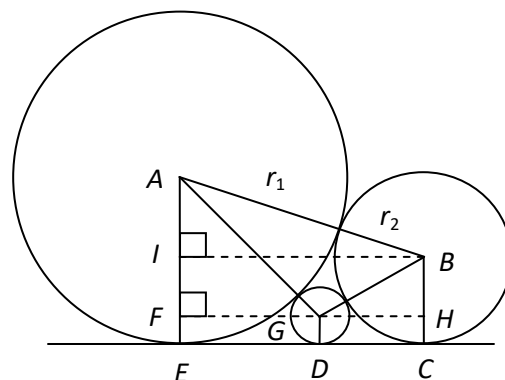
$$FG = \sqrt{AG^2 - AF^2}$$

$$= \sqrt{(9+x)^2 - (9-x)^2}$$

$$= \sqrt{(9+x+9-x)(9+x-9+x)}$$

$$= \sqrt{36x} = 6\sqrt{x}$$

$$HG = \sqrt{BG^2 - BH^2}$$



$$= \sqrt{(4+x)^2 - (4-x)^2} = \sqrt{(4+x+4-x)(4+x-4+x)} = \sqrt{16x} = 4\sqrt{x}$$

$$BI = \sqrt{AB^2 - AI^2} = \sqrt{(9+4)^2 - (9-4)^2} = \sqrt{169-25} = \sqrt{144} = 12$$

$$FH = BI = CE = 12$$

$$FH = FG + HG$$

$$12 = 6\sqrt{x} + 4\sqrt{x}$$

$$12 = 10\sqrt{x}$$

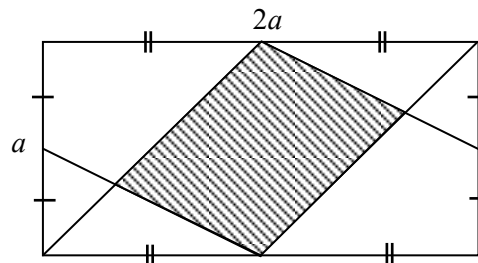
$$\sqrt{x} = \frac{6}{5}$$

$$x = \frac{36}{25}$$

Jadi, jari-jari lingkaran kecil adalah  $\frac{36}{25}$ .

89. Jika panjang dan lebar persegi panjang adalah  $2a$  dan  $a$ , hitunglah luas daerah yang diarsir.

- A.  $3a^2$
- B.  $2a^2$
- C.  $\frac{2}{3}a^2$
- D.  $\frac{1}{2}a^2$
- E.  $\frac{1}{3}a^2$



**Solusi: [C]**

$$\frac{AB}{BF + CF} = \frac{EF}{CF}$$

$$\frac{EF}{AB} = \frac{CF}{BF + CF} \dots (1)$$

$$\frac{CD}{BF + CF} = \frac{EF}{BF}$$

$$\frac{EF}{CD} = \frac{BF}{BF + CF} \dots (2)$$

Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh:

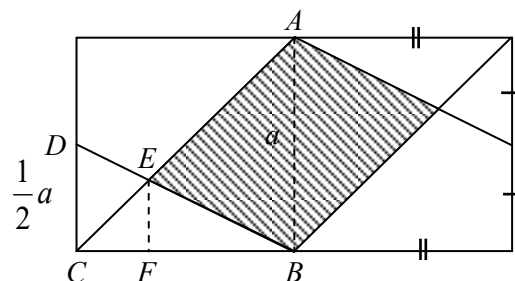
$$\frac{EF}{AB} + \frac{EF}{CD} = \frac{CF}{BF + CF} + \frac{BF}{BF + CF}$$

$$\frac{EF}{AB} + \frac{EF}{CD} = 1$$

$$EF = \frac{AB \times CD}{AB + CD} = \frac{a \times \frac{1}{2}a}{a + \frac{1}{2}a} = \frac{a^2}{3a} = \frac{a}{3}$$

$$[BEA] = [ABC] - [BCE] = \frac{1}{2}BC \times AB - \frac{1}{2}BC \times EF = \frac{1}{2}BC(AB - EF) = \frac{1}{2}a \left( a - \frac{a}{3} \right) = \frac{1}{3}a^2$$

$$\text{Jadi, luas daerah yang diarsir} = 2 \times [BEA] = 2 \times \frac{1}{3}a^2 = \frac{2}{3}a^2.$$



90. Jika panjang sebuah persegi panjang ditambah 2 cm dan lebarnya 3 cm, maka hasil perubahan itu berupa sebuah persegi. Sedangkan jika panjangnya di tambah 3 cm dan lebarnya ditambah 2 cm, maka persegi panjang itu luasnya bertambah  $43 \text{ cm}^2$ . Berapakah keliling persegi panjang tersebut?

A. 50 cm          B. 45 cm          C. 42 cm          D. 40 cm          E. 30 cm

**Solusi: [E]**

Ambillah panjang dan lebar persegi panjang itu adalah  $x$  dan  $y$ , sehingga:

$$x + 2 = y + 3 \text{ (persegi)}$$

$$y = x - 1 \dots (1)$$

$$(x + 3)(y + 2) = xy + 43$$

$$xy + 2x + 3y + 6 = xy + 43$$

$$2x + 3y = 37 \dots (2)$$

Dari persamaan (1) dan (2) kita memperoleh:

$$2x + 3(x - 1) = 37$$

$$2x + 3x - 3 = 37$$

$$5x = 40$$

$$x = 8$$

$$x = 8 \rightarrow y = x - 1 = 8 - 1 = 7$$

Jadi, keliling persegi panjang itu  $= 2(8 + 7) = 30 \text{ cm}$ .