Solusi Pengayaan Matematika
Edisi 9

Nomor Soal: 81-90

81. Untuk $f\left(x\right)=\dfrac{2x^2-5x-7}{x-3}$ dan $g\left(x\right)=x+1$ hitunglah $f\left(2005\right)-g^{-1}\left(2006\right)$ pada bilangan bulat terdekat.

A. 2004 B. 2005 C. 2006 D. 2007 E. 2008

Solusi: [C]

$$g\left(x\right)=x+1\rightarrow g^{-1}\left(x\right)=x-1$$

$$g^{-1}\left(2006\right)=2006-1=2005$$

$$f\left(x\right)=\frac{2x^2-5x-7}{x-3}=2x+1+\frac{-4}{x-3}$$

$$f\left(2005\right)=2\left(2005\right)+1+\frac{-4}{2005}=4011$$ (bilangan terdekat)

Jadi, $f\left(2005\right)-g^{-1}\left(2006\right)=4011-2005=2006$

82. Jika $f(x)=3x+1$ dan $g(f(x))=\dfrac{2x^3+x+1}{x^2+1}$, tentukan nilai $\left|g(7)\right|$.

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4 E. 5

Solusi: [C]

$$g(f(x))=\frac{2x^3+x+1}{x^2+1}$$

$$g(3x+1)=\frac{2x^3+x+1}{x^2+1}$$

$$g(x)=\frac{2\left(\dfrac{x-1}{3}\right)^3+\left(\dfrac{x-1}{3}\right)+1}{\left(\dfrac{x-1}{3}\right)^2+1}$$

$$g(7)=\frac{2\left(\frac{7-1}{3}\right)^3+\left(\frac{7-1}{3}\right)+1}{\left(\frac{7-1}{3}\right)^2+1}=\frac{2\cdot 2^3+2+1}{2^2+1}=\frac{16+2+1}{4+1}=\frac{19}{5}$$

$$\left\lfloor g(7)\right\rfloor=\left\lfloor\frac{19}{5}\right\rfloor=\left\lfloor 3\frac{4}{5}\right\rfloor=3$$

83. $f^{-1}(x)$ dan $g^{-1}(x)$ menyatakan invers fungsi $f(x)$ dan $g(x)$. Jika $h(x)=2x+1$ dan $(f\circ g\circ h)(x^2)=8x^2+2$, maka nilai dari $\left(g^{-1}\circ f^{-1}\right)(2)$ adalah ….

A. 5 B. 4 C. 3 D. 2 E. 1

Solusi: [E]

$(f\circ g\circ h)(x^2)=8x^2+2$

$(f\circ g\circ h)(x)=8x+2$

$(f\circ g)(2x+1)=4(2x+1)-2$

$(f\circ g)(x)=4x-2$

$(f\circ g)^{-1}(x)=\frac{x+2}{4}$

Kita mengetahui bahwa $(f\circ g)^{-1}(x)=\left(g^{-1}\circ f^{-1}\right)(x)$, sehingga

$\left(g^{-1}\circ f^{-1}\right)(2)=(f\circ g)^{-1}(2)=\frac{2+2}{4}=1$

84. Fungsi f didefinisikan sebagai $f(2-3x)=4-x$. Nilai dari $\sum_{i=1}^{15} f(i)=....$

A. 40 B. 50 C. 75 D. 80 E. 90

Solusi: [E]

Misalnya $t=2-3x$, sehingga $x=\frac{2-t}{3}$.

$f(2-3x)=4-x$

$f(t)=4-\frac{2-t}{3}=\frac{10+t}{3}$

$f(i)=\frac{10+i}{3}=\frac{10}{3}+\frac{i}{3}$

$\sum_{i=1}^{15} f(i)=f(1)+f(2)+f(3)+...+f(15)=15\left(\frac{10}{3}\right)+\frac{1}{3}(1+2+3+...+15)$

$$= 50 + \frac{1}{3} \times \frac{15}{2}(1+15) = 90$$

85. Jika $y = f(x) = \dfrac{5x+3}{4x-5}$, maka $x = ...$

A. $f(y)$ B. $f(-y)$ C. $-f(y)$ D. $2f(y)$ E. $f(2y)$

Solusi: [A]

$$y = \frac{5x+3}{4x-5}$$

$$y(4x-5) = 5x+3$$

$$4xy - 5x = 5y + 3$$

$$x(4y-5) = 5y+3$$

$$x = \frac{5y+3}{4y-5}$$

$$x = f(y)$$

86. Jika $f(x) = x^2$ dan $g(x) = 2 - x$, tentukan $\sum_{x=0}^{5} f(x) g^{-1}(x)$.

A. -32 B. -75 C. -115 D. 105 E. 215

Solusi: [C]

$$g(x) = 2 - x \to g^{-1}(x) = 2 - x$$

$$\sum_{x=0}^{5} f(x) g^{-1}(x) = \sum_{x=0}^{5} x^2(2-x) = 0 + 1 + 0 - 9 - 32 - 75 = -115$$

87. Diberikan $f(x) = 8x + 11$, $g(x) = 2x^3$, dan $h(x) = \dfrac{x+7}{2}$. Jika N adalah bilangan yang memenuhi $f(g(h(3)))$, jumlah angka-angka N adalah ….

A. 9 B. 8 C. 7 D. 6 E. 4

Solusi: [E]

Mulai dari dalam:

$$h(3) = \frac{3+7}{2} = 5$$

$$g(5) = 2 \cdot 5^3 = 250$$

$$f(250) = 8 \cdot 250 + 11 = 2011$$

$$N = f(g(h(3))) = f(g(5)) = f(250) = 2011$$

Jadi, jumlah angka-angka N adalah 2 + 0 + 1 + 1 = 4.

88. Diberikan $f(x) = x^2 + 22x + 110$. Tentukan akar real terbesar dari persamaan $f(f(f(x))) = 0$.

A. $11+\sqrt[8]{11}$ B. 11 C. $\sqrt[8]{11}$ D. $11-\sqrt[8]{11}$ E. $-11+\sqrt[8]{11}$

Solusi: [E]

Derngan melengkapkan kuadrat sempurna dari $f(x)=x^2+22x+110$ diperoleh

$f(x)=(x+11)^2-11$

$f(f(x))=f\left((x+11)^2-11\right)=\left[(x+11)^2-11+11\right]^2-11=(x+11)^4-11$

$f(f(f(x)))=\left[(x+11)^4-11+11\right]^2-11=(x+11)^8-11$

Selanjutnya $f(f(f(x)))=0$, sehingga persamaan menjadi

$(x+11)^8-11=0$

$(x+11)^8=11$

$x=-11\pm\sqrt[8]{11}$

Karena itu jawabannya adalah $-11+\sqrt[8]{11}$.

89. Diberikan suku banyak $f(x)$ sedemikian sehingga $f(x^2+1)=x^4+2x^2$ dan $f(x^2-1)=ax^4+4bx^2+c$. Berapakah nilai $a^2+b^2+c^2$?

A. 34 B. 27 C. 21 D. 17 E. 16

Solusi: [D]

$f(x^2+1)=x^4+2x^2=(x^2+1)^2+2(x^2+1)-3$, sehingga $f(w)=w^2+2w-3$

$f(x^2-1)=(x^2-1)^2+2(x^2-1)-3=x^4-2x^2+1+2x^2-2-3=x^4-4$

$=ax^4+4bx^2+c$

Sehingga $a=1$, $b=0$, dan $c=-4$

$\therefore a^2+b^2+c^2=1^2+0^2+(-4)^2=17$

90. Diberikan fungsi-fungsi $f(x)={}^2\log\left(-2x^2+x+21\right)$, $g(x)=\sqrt{6x^2+x-1}$, dan $h(x)=\dfrac{x-3}{7x+2}$.

A = banyak bilangan bulat dalam domain dari $(f+g)(x)$

C = nilai dari $h^{-1}(0)$

Tentukan nilai dari *AC*.

A. 25 B. 20 C. 18 D. 17 E. 15

Solusi: [E]

$(f+g)(x)={}^2\log\left[-(2x-7)(x+3)\right]+\sqrt{(2x+1)(3x-1)}$

Kita memerlukan $-(2x-7)(x+3)>0$ dan $(2x+1)(3x-1)\geq 0$

Dari pertidaksamaan pertama, $\left\{x \middle| -3 < x < \frac{7}{2}\right\}$. Dari persamaan kedua,

$\left\{x \middle| x \le -\frac{1}{2} \text{ atau } x \ge \frac{1}{3}\right\}$

Irisan dari kedua himpunan adalah $\left(-3,-\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{3},\frac{7}{2}\right)$.

Bilangan bulat yang termuat dalam himpunan tersebut adalah $-2, -1, 1, 2, 3$. Karena itu, total bilangan bulat adalah 5. Jadi, A = 5.

$$h(x) = \frac{x-3}{7x+2}$$

$$x = \frac{y-3}{7y+2}$$

$$7xy + 2x = y - 3$$

$$(7x-1)y = -2x-3$$

$$y = \frac{-2x-3}{7x-1}$$

$$h^{-1}(x) = \frac{-2x-3}{7x-1}$$

$$h^{-1}(0) = \frac{-2\cdot 0-3}{7\cdot 0-1} = 3$$

Karena itu, C = 3.

Jadi, $AC = 5 \times 3 = 15$.