Solusi Pengayaan Matematika
Edisi 9

Nomor Soal: 81-90

81. $f^{-1}(x)$ dan $g^{-1}(x)$ menyatakan invers fungsi $f(x)$ dan $g(x)$. Jika $h(x)=2x+1$ dan $(f \circ g \circ h)(x^2)=8x^2+2$, maka nilai dari $(g^{-1} \circ f^{-1})(2)$ adalah ….

A. 5 B. 4 C. 3 D. 2 E. 1

Solusi: [E]

$$(f \circ g \circ h)(x^2)=8x^2+2$$
$$(f \circ g \circ h)(x)=8x+2$$
$$(f \circ g)(2x+1)=4(2x+1)-2$$
$$(f \circ g)(x)=4x-2$$
$$(f \circ g)^{-1}(x)=\frac{x+2}{4}$$

Kita mengetahui bahwa $(f \circ g)^{-1}(x)=(g^{-1} \circ f^{-1})(x)$, sehingga

$$(g^{-1} \circ f^{-1})(2)=(f \circ g)^{-1}(2)=\frac{2+2}{4}=1$$

82. Diberikan $f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=3x$, dengan $x \neq 0$. Jika $f(x)=f(-x)$, maka himpunan penyelesaian dari persamaan ini adalah ….

A. $\{-\sqrt{2},\sqrt{2}\}$ B. $\{-2,2\}$ C. $\{2\}$ D. $\{-\sqrt{2}\}$ E. $\{\sqrt{2}\}$

Solusi: [A]

$$\begin{array}{l|l|l}
f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=3x & \times 1 & \Leftrightarrow f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=3x \\
f\left(\frac{1}{x}\right)+2f(x)=\frac{3}{x} & \times 2 & \Leftrightarrow \underline{2f\left(\frac{1}{x}\right)+4f(x)=\frac{6}{x}} \; -
\end{array}$$

$$-3f(x)=3x-\frac{6}{x}$$
$$f(x)=-x+\frac{2}{x}$$

$$f(x)=f(-x)$$

$$-x+\frac{2}{x}=x-\frac{2}{x}$$

$$2x-\frac{4}{x}=0$$

$$2x^2-4=0$$

$$x^2=2$$

$$x=\pm\sqrt{2}$$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\left\{-\sqrt{2},\sqrt{2}\right\}$.

83. Diberikan $f(x)=(x+2)^4-8(x+2)^3+24(x+2)^2-32(x+2)+16$. Tentukan nilai dari $f(2005)$.

A. 2005^5 B. 2005^4 C. 2005^3 D. 2005^2 E. 2005

Solusi: [B]

$$x^2=\left[(x+p)-p\right]^2=(x+p)^2-2(x+p)p+p^2$$

$$x^3=\left[(x+p)-p\right]^3=(x+p)^3-3(x+p)^2p+3(x+p)p^2+p^3$$

$$x^4=\left[(x+p)-p\right]^4=(x+p)^4-4(x+p)^3p+6(x+p)^2p^2-4(x+p)p^3+p^4$$

Persamaan pada baris terakhir identik dengan fungsi, maka nilai $p=2$ dan $f(x)=x^4$.

$f(2005)=2005^4$.

84. Diberikan f adalah fungsi bilangan real yang didefinisikan untuk semua bilangan real. f ditentukan oleh kondisi sebagai berikut ini.

$f(xy)=f(x)f(y)$

$f(x+y)=f(x)+f(y)$ untuk semua bilangan real x dan y.

Tentukanlah nilai dari $f(2005)$.

A. 2008 B. 2007 C. 2006 D. 2005 E. 2004

Solusi: [D]

Untuk $x=y=0$ memberikan:

$f(0)=f(0)+f(0)$

$f(0)=0$

Asumsikan bahwa $f(x_0)\neq 0$ untuk semua x_0, maka $f(x_0)=f(1)f(x_0)$, sehingga:

$f(1)=1$, $f(2)=f(1)+f(1)=2$, $f(3)=f(2)+f(1)=3$, …, $f(i)=f(i-1)+f(1)=i$, untuk setiap bilangan bulat positif.

$f(2005)=2005$

85. Untuk semua bilangan bulat *x*, fungsi $f(x)$ memenuhi $f(x+1)=\frac{1+f(x)}{1-f(x)}$.

Jika $f(1)=2$, maka nilai dari $f(2005)=....$

A. -3 B. $-\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{3}$ D. 2 E. 3

Solusi: [D]

$$f(x+1)=\frac{1+f(x)}{1-f(x)}$$

$$f(1)=2$$

$$f(2)=\frac{1+f(1)}{1-f(1)}=\frac{1+2}{1-2}=-3$$

$$f(3)=\frac{1+f(2)}{1-f(2)}=\frac{1-3}{1+3}=-\frac{1}{2}$$

$$f(4)=\frac{1+f(3)}{1-f(3)}=\frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}$$

$$f(5)=\frac{1+f(4)}{1-f(4)}=\frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=2=f(1)$$

Dengan demikian, $f(n+4)=f(n)$, sehingga

$f(2005)=f(2001)=...=f(1)=2$

86. Nilai dari $f(2)$ yang terdefinisi dalam persamaan $x^{-1}f(-x)+f\left(x^{-1}\right)=x$, untuk semua $x\in R$ dan $x\neq 0$ adalah ….

A. 9 B. 8 C. $\frac{9}{2}$ D. 4 E. $\frac{9}{4}$

Solusi: [E]

Misalnya $x=-y$, sehingga didapat

$-y^{-1}f(y)+f\left(-y^{-1}\right)=-y$, untuk semua nilai $y\neq 0$ …. (1)

Persamaan (1) dikalikan dengan *y*, sehingga didapat

$-f(y)+yf\left(-y^{-1}\right)=-y^{2}$ …. (2)

Misalnya $x=y^{-1}$, sehingga didapat $yf\left(-y^{-1}\right)+f(y)=y^{-1}$, untuk semua nilai $y\neq 0$ …. (3)

Kurangkan persamaan (2) oleh persamaan (3) sehingga didapat

$$2f(y) = y^{-1} + y^2$$

$f(y) = \dfrac{y^3+1}{2y}$, untuk semua nilai $y \neq 0$ atau kita dapat menyatakannya sebagai

$f(x) = \dfrac{x^3+1}{2x}$, untuk semua nilai $x \neq 0$

Jadi, nilai $f(2) = \dfrac{2^3+1}{2 \cdot 2} = \dfrac{9}{4}$.

87. Fungsi *f* didefinisikan sebagai $f(x-2) = x-3$. Jika $N = \sum_{i=1}^{2005} f(i)$, maka jumlah angka-angka bilangan *N* adalah ....

A. 10 B. 11 C. 12 D. 13 E. 14

Solusi: [C]

Misalnya $t = x-2$, sehingga $x = t+2$.

$$f(x-2) = x-3$$

$$f(t) = t+2-3 = t-1$$

$$f(i) = i-1$$

$$\sum_{i=1}^{2005} f(i) = f(1) + f(2) + f(3) + \ldots + f(2005) = (1+2+3+\ldots+2005) - 2005 \cdot 1$$

$$= \frac{2005}{2}(1+2005) - 2005 = 2.009.010$$

Jadi, jumlah angka-angka bilangan N adalah 2 + 0 + 0 + 9 + 0 + 1 + 0 = 12.

88. Fungsi $f(x)$ didefinisikan untuk semua bilangan real *x*. Jika $f(a+b) = f(ab)$ untuk semua *a*, *b*, dan $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{1}{2}$, hitunglah $f(2005)$.

A. 2006 B. 1003 C. 1 D. $\dfrac{1}{2}$ E. $-\dfrac{1}{2}$

Solusi: [E]

$f(x) = f(x+0) = f(x \cdot 0) = f(0)$ untuk semua *x*.

Jadi, *f* adalah fungsi konstan dengan $f(x) = f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{1}{2}$ dan $f(2005) = -\dfrac{1}{2}$.

89. Diberikan *f* adalah sebuah fungsi sedemikian, sehingga $f\left(x+y^2\right) = f(x) + 2(f(y))^2$, dan $f(1) \neq 0$. Carilah nilai dari $2f(2005)$.

A. 2005 B. 1005 C. 555 D. 505 E. $\dfrac{1}{2}$

Solusi: [A]

Jika $x = y = 0$, maka $f(0) = f(0) + 2(f(0))^2$

$$f(0) = 0$$

Jika $x = 0, y = 1$, maka $f(1) = f(0) + 2(f(1))^2$

$$f(1) = \frac{1}{2} \qquad (f(1) \neq 0)$$

Jika $y = 1$, maka

$$f(x+1) = f(x) + 2(f(1))^2$$

$$f(x+1) = f(x) + 2\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$f(x+1) = f(x) + \frac{1}{2}$$

Akibatnya $f(x) = \frac{x}{2}$

Jadi, $2f(2010) = 2 \cdot \frac{2005}{2} = 2005$

90. Diberikan $f\left(x\right) = \begin{cases} x+3, x>100 \\ f\left(3x\right)+x, x\leq 100 \end{cases}$. Angka satuan dari $2^{f\left(7\right)}$ adalah ....

A. 1 B. 3 C. 4 D. 6 E. 8

Solusi: [B]

$$f\left(7\right) = f\left(21\right) + 7 = f\left(63\right) + 21 + 7 = f\left(189\right) + 63 + 21 + 7$$
$$= 189 + 3 + 63 + 21 + 7 = 283$$

Pola angka satuan dari bilangan 2^n dengan *n* bilangan bulat postif (bilangan asli) adalah 1, 4, 8, 6.

Karena $2^{f\left(7\right)} = 2^{283} = 2^{70\times 4+3}$, maka angka satuannya adalah 8.