Solusi Pengayaan Matematika
Edisi 8

Nomor Soal: 71-80

71. Buktikan bahwa hasil kali empat bilangan bulat berturutan adalah tak pernah berbentuk kuadrat sempurna.

Solusi:

$$n(n+1)(n+2)(n+3) = [n(n+3)][(n+1)(n+2)]$$
$$= (n^2+3n)(n^2+3n+2)$$
$$= (n^2+3n)^2 + 2(n^2+3n)$$
$$= (n^2+3n+1)^2 - 1$$

Jadi, perkalian $n(n+1)(n+2)(n+3)$ adalah selalu 1 kurangnya dari suatu bentuk kuadrat.

72. Jika $s = p+q+r$, buktikan bahwa $(ps+qr)(qs+pr)(rs+pq)$ kuadrat sempurna.

Solusi:

$$(ps+qr)(qs+pr)(rs+pq) = [p(p+q+r)+qr][q(p+q+r)+pr][r(p+q+r)+pq]$$
$$= (p^2+pq+pr+qr)(pq+q^2+qr+pr)(pr+qr+r^2+pq)$$
$$= (p^2+pq+pr+qr)(pq+q^2+qr+pr)(pr+qr+r^2+pq)$$
$$= [p(p+r)+q(p+r)][p(q+r)+q(q+r)][p(q+r)+r(q+r)]$$
$$= (p+r)(p+q)(q+r)(p+q)(q+r)(p+r)$$
$$= (p+r)^2(p+q)^2(q+r)^2 \text{(bentuk kuadrat sempurna)}$$
$$= [(p+q)(p+r)(qr)]^2 \text{ (bentuk kuadrat sempurna) (qed)}$$

73. Buktikan bahwa di antara sembarang dua belas bilangan dua digit terdapat dua yang selisihnya terbentuk oleh dua digit identik.

Solusi:

Hanya terdapat 11 sisa yang berlainan pada pembgian oleh 11: 0, 1, 2, …, 10, karena itu di antara sembarang 12 bilangan haruslah terdapat dua bilangan, sebut saja a dan b yang menghasilkan sisa yang sama sesudah pembagian oleh 11, tetapi lalu selisih antara $a-b$ terbagi oleh 11, sebagai tambahn $a-b$ adalah bilangan dua-digit, diantara bilangan dua-digit hanyalah yang terdiri atas dua digit identik yang terbagikan oleh 11.

74. Buktikan bahwa untuk sebarang utuhan n, $n^5 - 5n^3 + 4n$ terbagikan oleh 120.

Solusi:

Misalnya $P(n) = n^5 - 5n^3 + 4n$, sehingga

$$P(n) = n^5 - 5n^3 + 4n = n(n^4 - 5n^2 + 4) = n(n^2-1)(n^2-4) = n(n-1)(n+1)(n-2)(n+2)$$
$$= (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$$

Di samping itu, $120 = 2^3 \times 3 \times 5$.

Karena untuk sebarang utuhan n, $P(n)$ adalah hasil kali dari lima utuhan berurutan, dan salah satu dari sebarang lima utuhan berurutan adalah kelipatan 5, maka $P(n)$ terbagikan oleh 5.

Serupa dengan itu, dari sebarang tiga utuhan berurutan, salah satu adalah kelipatan 3, maka maka $P(n)$ terbagikan oleh 3 untuk sebarang utuhan n.

Dari sebarang empat utuhan berurutan, salah satu adalah kelipatan 4, tambah satu lagi genap; karenanya $P(n)$ terbagikan oleh $4 \times 2 = 8$ untuk sebarang utuhan n.

Dengan demikian, $P(n)$ terbagikan oleh $2^3 \times 3 \times 5 = 120$. (qed)

75. Misalnya A adalah himpunan yang anggotanya adalah 20 bilangan bulat yang diambil dari berisan aritmetika 1, 4, 7, …, 100. Buktikan bahwa selalu ada dua bilangan bulat di A yang hasil tambahnya sama dengan 104.

Solusi:

Ada 34 bilangan dalam barisan itu. Dari ke-34 bilangan itu terdapat 16 pasang bilangan yang memberikan hasil tambah 104, yaitu:

4	7	10	…	49
100	97	94	…	55

Sehingga bila A adalah himpunan dari 20 bilangan bulat yang berasal dari bilangan aritmetika itu, maka A harus mengandung dua bilangan bulat yang hasil tambahnya = 104.

76. Buktikan bahwa ada satu dan hanya satu bilangan asli n sehingga $m^2 = 2^8 + 2^{11} + 2^n$ merupakan nilangan kuadrat murni.

Solusi:

Misalnya $m^2 = 2^8 + 2^{11} + 2^n$ untuk suatu bilangan bulat positf m. Sehingga

$$2^n = m^2 - 2^8 - 2^{11} = m^2 - 2^8\left(1 + 2^3\right) = m^2 - 2^8 \cdot 9 = m^2 - \left(3 \times 2^4\right)^2 = (m - 48)(m + 48)$$

Menurut Teorema Faktorisasi Tunggal, maka ada bilangan bulat negatif s dan t sehingga:

$m - 48 = 2^s$, $m + 48 = 2^t$, $s + t = n$

$2^s + 48 = 2^t - 48$

$2^t - 2^s = 96$

$2^s\left(2^{t-s} - 1\right) = 2^5 \times 3$

Karena $2^{t-s} - 1$ bilangan ganjil, maka

$2^{t-s} - 1 = 3$ dan $2^s = 2^5 \Leftrightarrow s = 5$

$2^{t-s} = 4$

$2^{t-s} = 2^2$

$t - s = 2$

$t - 5 = 2$

$t = 7$

$$\left.\begin{matrix} s = 5 \\ t = 7 \end{matrix}\right\} \rightarrow n = s + t = 5 + 7 = 12$$

77. Dua bilangan bulat x dan y dikatakan *kongruen modulo n*, ditulis $x \equiv y (\bmod n)$, jika $x - y = kn$ untuk suatu bilangan bulat k. Apakah pernyataan di bawah ini bernilai benar?

$2^x \equiv 2^y (\bmod n)$ bila $x \equiv y (\bmod n)$. Jelaskan!

Solusi:

Pernyataan $2^x \equiv 2^y (\bmod n)$ bila $x \equiv y (\bmod n)$ bernilai salah, karena untuk $n = 3$, $x = 2$, $y = 5$, kita mempunyai:

$2 \equiv 5 (\bmod 3)$ tetapi $2^2 \equiv 2^5 (\bmod 3)$

78. Buktikan bahwa $\underbrace{11111...11}_{2005}\underbrace{22222...22}_{2006}5$ adalah bentuk kuadrat sempurna.

Solusi:

$$\underbrace{11111...1}_{2005}\underbrace{122222...22}_{2006}5 = 10^{4011} + 10^{4010} + ... + 10^{2007} + 2\left(10^{2006} + 10^{2005} + ... + 10\right) + 5$$

$$= \frac{10^{4011}\left[1-\left(\frac{1}{10}\right)^{2005}\right]}{1-\frac{1}{10}} + 2\times\frac{10^{2006}\left[1-\left(\frac{1}{10}\right)^{2006}\right]}{1-\frac{1}{10}} + 5$$

$$= \frac{10\left(10^{4011} - 10^{2006}\right)}{9} + 2\times\frac{10\left(10^{2006}-1\right)}{9} + 5$$

$$= \frac{1}{9}\left(10^{4012} - 10^{2007} + 2\times 10^{2007} - 20 + 45\right)$$

$$= \frac{1}{9}\left(10^{4012} + 10^{2007} + 25\right)$$

$$= \frac{1}{9}\left[\left(10^{2006}\right)^2 + 10\times 10^{2006} + 25\right]$$

$$= \frac{1}{9}\left(10^{2006} + 5\right)^2$$

$$= \left[\frac{1}{3}\left(10^{2006} + 5\right)\right]^2$$

$$= \left(\underbrace{33333...33}_{2005}5\right)^2 \quad \text{(qed)}$$

79. Buktikan bahwa hasil kali empat buah bilangan bulat positif berurutan tidak pernah berbentuk kuadrat sempurna.

Solusi:

Misalnya ke empat bilangan bulat positif berurutan adalah $n-1$, n, $n+1$, dan $n+2$

$$(n-1)(n)(n+1)(n+2) = n^4 - n^2 + 2n^3 - 2n = \left(n^4 + 2n^3 - n^2 - 2n + 1\right) - 1 = \left(n^2 + n - 1\right)^2 - 1$$

Bentuk terakhir menunjukkan bentuk kuadrat sempurna kurang 1. Jadi, perkalian empat bilangan bulat positif berurutan tidak pernah berbentuk kuadrat sempurna. (qed)

80. Buktikan bahwa $a^2 + b^2 = a^2b^2$ tidak memiliki penyelesaian bulat, kecuali $a = b = 0$.

Solusi:

$a^2 + b^2 = a^2b^2$

$a^2b^2 - a^2 - b^2 + 1 = 1$

$a^2\left(b^2 - 1\right) - \left(b^2 - 1\right) = 1$

$\left(a^2 - 1\right)\left(b^2 - 1\right) = 1$

Persamaan yang diperoleh tekahir hanya dipenuhi oleh bilangan bulat $a = b = 0$. (qed)