Solusi Pengayaan Matematika
Edisi 8

Nomor Soal: 71-80

71. Jika $2009^3 = x^2 - y^2$, dengan x dan y adalah bilangan asli, tentukan nilai $x - y$.

A. 2007 B. 2008 C. 2009 D. 2010 E. 2012

Solusi: [C]

Kita mengetahui bahwa $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + (n-1)^3 + n^3 = \left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]^2$

$$\left[\frac{1}{2}(n-1)n\right]^2 + n^3 = \left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]^2$$

$$n^3 = \left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]^2 - \left[\frac{1}{2}(n-1)n\right]^2$$

$$2009^3 = x^2 - y^2$$

$$2009^3 = \left[\frac{1}{2}\times 2009(2009+1)\right]^2 - \left[\frac{1}{2}(2009-1)\times 2009\right]^2 = 2.019.045^2 - 2.017.036^2$$

Karena itu, $x = 2.019.045$ dan $y = 2.017.036$ $y = 2009010$.

Jadi, nilai $x - y = 2.019.045 - 2.017.036 = 2009$

72. a, b, c, d, dan e adalah bilangan-bilangan real sedemikian, sehingga

$a + b + c + d + e = 8$.

$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = 16$.

Tentukanlah nilai terbesar dari e.

A. 16 B. 6 C. $\frac{16}{5}$ D. $\frac{6}{5}$ E. $\frac{1}{5}$

Solusi: [C]

Konsep identitas: $2xy \le x^2 + y^2$

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = 16 \to a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 16 - e^2$$

$$a + b + c + d + e = 8$$

$$(8-e)^2 = (a+b+c+d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd$$

$$\le a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + a^2 + b^2 + a^2 + c^2 + a^2 + d^2 + b^2 + c^2 + b^2 + d^2 + c^2 + d^2$$

$$\le 4\left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2\right) = 4\left(16 - e^2\right)$$

$$64 - 16e + e^2 \le 64 - 4e^2$$

$$5e^2 - 16e \le 0$$

$$e(5e - 16) \le 0$$

$$0 \le e \le \frac{16}{5}$$

Jadi, nilai terbesar dari e adalah $\frac{16}{5}$ dapat diperoleh dengan $a = b = c = d = \frac{6}{5}$.

73. Diberikan x, y, dan z adalah bilangan-bilangan real. Tentukan nilai terbesar dari z yang memenuhi sistem persamaan $x+y+z=5$ dan $xy+yz+zx=3$.

A. 13 B. 3 C. $\frac{13}{3}$ D. 1 E. $\frac{1}{3}$

Solusi: [C]

$x+y+z=5 \to x+y=5-z$

$x+y=5-z \to xy+yz+zx=3$

$xy+z(x+y)=3$

$xy+z(5-z)=3$

$xy=3-5z+z^2$

$(x-y)^2=(x+y)^2-4xy=(5-z)^2-4\left(3-5z+z^2\right)=13+10z-3z^2=(3z-13)(z+1)\geq 0$

Kita memperoleh bahwa $-1\leq z\leq \frac{13}{3}$ dan nilai terbesar dari z yang mungkin adalah $\frac{13}{3}$, dengan $x=y=\frac{1}{3}$.

74. Seorang anak laki-laki menuliskan umur ayahnya setelah menuliskan umurnya. Untuk bilangan empat angka ini ia menambahkan 16 kali perbedaan antara umur mereka dan diperoleh 1991. Tentukanlah umur Ayah.

A. 33 tahun B. 36 tahun C. 43 tahun D. 48 tahun E. 63 tahun

Solusi: [C]

Misalnya umur anak laki-laki x tahun dan ayahnya y tahun, sehingga

$100x+y+16(y-x)=1991$

$y=117-5x+\frac{x+2}{17}$

Dalam kasus ini 17 harus habis membagi $x+2$ dan $117>5b$, yang hanya mungkin dipenuhi oleh $x=15$ dan $y=43$.

Jadi, umur anak laki-laki adalah 15 tahun dan ayahnya berumur 43 tahun.

75. Jika m dan n bilangan bulat positif yang memenuhi $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{5}{12}$, carilah nilai dari m^2+n^2.

A. 135 B. 144 C. 153 D. 160 E. 183

Solusi: [C]

$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{5}{12}$

$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{15}{36}$

$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{3}{36}+\frac{12}{36}$

$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{1}{12}+\frac{1}{3}$

$m=12$ dan $n=3$

$m^2+n^2=12^2+3^2=144+9=153$

76. Diberikan a, b, c adalah bilangan-bilangan bulat positif yang memenuhi $a+b+c=1$. Tentukanlah nilai terkecil dari $\left(\frac{1}{a}-1\right)\left(\frac{1}{b}-1\right)\left(\frac{1}{c}-1\right)$.

A. 16 B. 15 C. 13 D. 10 E. 8

Solusi: [E]

Karena $a+b+c=1$ dan sejalan dengan ketaksamaan *AM-GM*, maka kita memperoleh:

$AM \geq GM$

$$\left(\frac{1}{a}-1\right)\left(\frac{1}{b}-1\right)\left(\frac{1}{c}-1\right)=\left(\frac{1-a}{a}\right)\left(\frac{1-b}{b}\right)\left(\frac{1-c}{c}\right)=\left(\frac{b+c}{a}\right)\left(\frac{a+c}{b}\right)\left(\frac{a+b}{c}\right)$$

$$\geq \frac{2\sqrt{bc}}{a}\times\frac{2\sqrt{ca}}{b}\times\frac{2\sqrt{ab}}{c}$$

$$=\frac{8\sqrt{(abc)^2}}{abc}=\frac{8abc}{abc}=8.$$

77. a, b, c, d, e adalah bilangan-bilangan real yang memenuhi $a+b+c+d+e=37$ dan $2^a+2^b+2^c+2^d+2^e=1024$. Berapakah nilai terbesar yang mungkin dari a?

A. 18 B. 15 C. 12 D. 9 E. 6

Solusi: [D]

$a+b+c+d+e=37 \rightarrow b+c+d+e=37-a$

$1024-2^a=2^b+2^c+2^d+2^e$

Gunakan ketaksamaan *AM-GM*, sehingga diperoleh:

$AM \geq GM$

$$\frac{1024-2^a}{4}=\frac{2^b+2^c+2^d+2^e}{4}\geq 2^{\frac{b+c+d+e}{4}}=2^{\frac{37-a}{4}}$$

$$256-2^{a-2}\geq 2^{\frac{37-a}{4}}$$

$$256\geq 2^{\frac{37-a}{4}}+2^{a-2}$$

Gunakan ketaksamaan *AM-GM* sekali lagi, sehingga kita memperoleh:

$AM \geq GM$

$$256\geq 2^{\frac{37-a}{4}}+2^{a-2}\geq 2\cdot\sqrt{2^{\frac{37-a}{4}}}\cdot\sqrt{2^{a-2}}=2\cdot 2^{\frac{37-a}{8}}\cdot 2^{\frac{a-2}{2}}=2^{\frac{37+3a}{8}}$$

$$2^8\geq 2^{\frac{37+3a}{8}}$$

$$\frac{37+3a}{8}\leq 8$$

$$37+3a\leq 64$$

$$3a\leq 27$$

$$a\leq 9$$

Sekarang yang mungkin adalah $a=9$ yang memberikan $b=c=d=e=7$.

78. Tentukan banyak nilai $n \in$ bulat yang menyebabkan $\frac{7n+43}{n-1}$ juga bilangan bulat.

A. 7 B. 8 C. 9 D. 10 E. 11

Solusi: [E]

$\frac{7n+43}{n-1}=7+\frac{50}{n-1}$, dengan $n \in$ bulat.

Agar $7+\frac{50}{n-1}$ bilangan bulat, maka haruslah $n-1$ merupakan faktor dari 50, dengan $n \neq 1$.

Karena itu, $n-1=1,\pm 2,\pm 5,\pm 10,\pm 25,\pm 50$ sehingga nilai $n \in$ bulat yang diminta adalah 2, 3, 6, 11, 26, 51, −1, −4, −9, −24, dan −49.

Jadi, banyak n yang merupakan bilangan bulat adalah 11.

79. Diberikan dua buah bilangan asli yang terdiri dari dua angka x dan y dengan $x < y$. Hasil kali xy adalah sebuah bilangan yang terdiri dari empat angka yang dimulai dengan angka 2. Hasil kali bilangan itu dikurangi empat angka itu sama dengan $x + y$. Kita mengetahui bahwa $x = 30$ dan $y = 70$ adalah sepasang bilangan dari bilangan itu. Carilah banyak pasangan bilangan (x, y) yang lainnya.

A. 5 B. 4 C. 3 D. 2 E. 1

Solusi: [D]

$xy-2000=x+y$

$xy-x-y+1=2001$

$x(y-1)-(y-1)=2001$

$(x-1)(y-1)=3\times 23\times 29$

Kita ketahui bahwa $x<y$ dan $2000<xy<3000$, maka $x-1=23 \Leftrightarrow x=24$ atau $x-1=29 \Leftrightarrow x=30$, sehingga $y-1=3\times 29 \Leftrightarrow y=88$ atau $y-1=3\times 23 \Leftrightarrow y=70$.

Jadi, pasangan (x, y) adalah (24,88) atau (30,70).

80. Diberikan dua buah bilangan asli m dan n yang memenuhi persamaan $m^4=m^3+n^3$, dengan $m,n<2500$. Carilah banyak pasangan dari (m,n).

A. 4 B. 5 C. 6 D. 7 E. 8

Solusi: [E]

$m^4=m^3+n^3$

$n^3=m^3(m-1)$

$n=m\sqrt[3]{m-1}$

Dalam kasus ini nilai dari $(m-1)$ harus merupakah bilangan pangkat 3.

Untuk menentukan pasangan dari (m,n) kita dapat menggunakan tabel berikut ini.

m	2	9	28	65	126	217	344
n	2	18	84	260	630	1302	2408

Pasangan dari (m,n) adalah (2, 2); (9, 18); (28, 84); (65, 260); (126, 630); (126, 630); (217, 1302); dan (344, 2408).