Solusi Pengayaan Matematika
Edisi 8

Nomor Soal: 71-80

71. Dari pembagian berikut ini, huruf-huruf *a, b, c, d, e, f, g,* dan *h* mewakili suatu angka. Huruf *h* diwakili oleh angka ….
A. 6
B. 5
C. 4
D. 3
E. 2

$$\begin{array}{c|cccl} & & 5 & \boxed{a} & \\ \cline{2-4} 9 & 4 & \boxed{b} & c & \\ & \boxed{d} & \boxed{e} & & \\ \cline{2-4} & & 3 & \boxed{f} & - \\ & & \boxed{g} & \boxed{h} & \\ \cline{3-4} & & & 0 & - \end{array}$$

Solusi:
1) Angka $d = 4$ dan $e = 5$ (karena $9 \times 5 = 45$).
   Angka $b = 8$ (karena $8 - 5 = 3$).
2) Angka $a = 4$ (karena $9 \times 4 = 36$).
3) Angka $g = 3$ dan angka-angka $c = f = h = 6$.

Jadi, selengkapnya pembagian tersebut adalah

$$\begin{array}{c|cccl} & & 5 & \boxed{4} & \\ \cline{2-4} 9 & 4 & \boxed{8} & \boxed{6} & \\ & \boxed{4} & \boxed{5} & & \\ \cline{2-4} & & 3 & \boxed{6} & - \\ & & \boxed{3} & \boxed{6} & \\ \cline{3-4} & & & 0 & - \end{array}$$

72. Carilah nilai n yang memenuhi penyelesaian dari persamaan $\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{n}{5}\right]=n$, dengan $[x]$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan x.

A. 12 B. 20 C. 26 D. 30 E. 40

Solusi: [D]

Misalnya $n = 30a + b$, dengan $0 \le b < 30$, maka persamaan $\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{n}{5}\right]=n$ menjadi

$$\left[\frac{30a+b}{2}\right]+\left[\frac{30a+b}{3}\right]+\left[\frac{30a+b}{5}\right]=30a+b$$

$$15a+\left[\frac{b}{2}\right]+10a+\left[\frac{b}{3}\right]+6a+\left[\frac{b}{5}\right]=30a+b$$

$$a+\left[\frac{b}{2}\right]+\left[\frac{b}{3}\right]+\left[\frac{b}{5}\right]=b$$

$$a=b-\left\{\left[\frac{b}{2}\right]+\left[\frac{b}{3}\right]+\left[\frac{b}{5}\right]\right\}, \text{ dengan } 0 \le b < 30$$

Jika $b = 0$, maka $a = 0-\left\{\left[\frac{0}{2}\right]+\left[\frac{0}{3}\right]+\left[\frac{0}{5}\right]\right\}=0$

Jika $b = 1$, maka $a = 1 - \left\{ \left[\frac{1}{2}\right] + \left[\frac{1}{3}\right] + \left[\frac{1}{5}\right] \right\} = 1 - (0 + 0 + 0) = 1$

Jika $b = 2$, maka $a = 2 - \left\{ \left[\frac{2}{2}\right] + \left[\frac{2}{3}\right] + \left[\frac{2}{5}\right] \right\} = 2 - (1 + 0 + 0) = 1$

$\vdots$

Jika $b = 29$, maka $a = 29 - \left\{ \left[\frac{29}{2}\right] + \left[\frac{29}{3}\right] + \left[\frac{29}{5}\right] \right\} = 29 - (14 + 9 + 5) = 1$

Jadi, banyaknya nilai *n* adalah 30.

73. Tentukan banyak pasangan (x,y), dengan x, $y \in Z$ (bilangan bulat atau integer), sedemikian sehingga: $x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = 8(x^2 + xy + y^2 + 1)$

A. 6 B. 4 C. 3 D. 2 E. 1

Solusi: [D]

Misalnya $a = x + y$ dan $b = xy$, maka

$$x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = 8(x^2 + xy + y^2 + 1)$$

$$(x^2 + y^2)(x + y) = 8\left[(x + y)^2 - xy + 1\right]$$

$$\left[(x + y)^2 - 2xy\right](x + y) = 8\left[(x + y)^2 - xy + 1\right]$$

$$a(a^2 - 2b) = 8(a^2 - b + 1)$$

$$a^3 - 2ab = 8a^2 - 8b + 8$$

Ambillah $a = 2t$, maka

$$(2t)^3 - 2(2t)b = 8(2t)^2 - 8b + 8$$

$$8t^3 - 4bt = 32t^2 - 8b + 8$$

$$2t^3 - bt = 8t^2 - 2b + 2$$

$$(t - 2)b = 2t^3 - 8t^2 - 2$$

$$b = \frac{2t^3 - 8t^2 - 2}{t - 2}$$

$$b = 2t^2 - 4t - 8 - \frac{18}{t - 2}$$

Faktor dari 18 adalah ±1, ±2, ±3, ±6, ±9, ±18, maka t – 2 nilainya adalah 3 dan 1, 4 dan 0, 5 dan –1, 8 dan –4, 11 dan –7, 20 dan –16.

t	b	t	b
3	–20	1	8
4	–1	0	1
5	16	–1	28
8	85	–4	43
11	188	–7	120
20	711	–16	569

Dari semua nilai itu hanya untuk $t = 5$, maka $a = 2t = 2 \times 5 = 10$ dan $b = 16$, sehingga $x + y = 10$ dan $xy = 16$ yang memberikan nilai real untuk pasangan x dan y, yaitu:

$$x(10 - x) = 16$$

$x^2 - 10x + 16 = 0$

$(x - 2)(x - 8) = 0$

$x = 2$ atau $x = 8$

Untuk $x = 2$, maka $y = 10 - x = 10 - 2 = 8 \rightarrow (2,8)$

Untuk $x = 8$, maka $y = 10 - x = 10 - 8 = 2 \rightarrow (8,2)$

Pasangan (x, y) yang memenuhi persamaan itu adalah (2,8) dan (8,2).

Jadi, banyak pasangan (x, y) adalah 2.

74. Tentukan digit terakhir dari $(((((7)^7)^7)^7)^{\cdots})^7$ dengan pemangkatan sebanyak 1.000 kali?

A. 9 B. 7 C. 4 D. 3 E. 1

Solusi: [B]

Kita dapat mengetahui bahwa

$7^2 = 7 \cdot 7 = 49$, digit akhir 9

$7^3 = 7^2 \cdot 7$, digit akhir 3

$7^4 = 7^2 \cdot 7^2$, digit akhir 1

$7^5 = 7^3 \cdot 7^2$, digit akhir 7

$7^6 = 7^3 \cdot 7^3$, digit akhir 9

Digit akhir dari pemangkatan akan terus berulang secara berurutan di angka 1, 4, 7, 9; dengan pola $4n - 3 = 7$, $4n - 2 = 9$, $4n - 1 = 3$, $4n = 1$, sehingga

7^7 berdigit akhir 3.

$(((7)^7)^7) = 7^{49}$, digit akhir 7.

$((((7)^7)^7)^7) = 7^{343}$, digit akhir 3.

Selanjutnya dapat diketahui bahwa untuk jumlah pangkat ganjil berdigit akhir 3 dan jumlah pangkat genap berdigit akhir 7. Karena 1.000 adalah bilangan genap, maka digit terakhir dari bilangan itu adalah angka 7.

75. Digit pertama dari bilangan enam-digit, N sama dengan digit yang keempat, yang kedua sama dengan yang kelima, dan yang ketiga sama dengan yang keenam. Bilangan N terbagikan oleh …

A. 13 B. 11 C. 10 D. 5 E. 3

Solusi: [A]

Misalnya a digit pertama, b digit kedua, dan c digit ketiga, sehingga

$abcabc = 1001 \cdot abc = 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot abc$

Jadi, bilangan N terbagikan oleh 7, 11, dan 13.

76. Hasil kali empat bilangan bulat berturutan adalah selalu habis dibagi ....

A. 7 B. 11 C. 17 D. 24 E. 28

Solusi: [D]

Jika n, $n+1$, $n+2$, dan $n+3$ adalah bilangan bulat positif, sekurang-kurangnya satu dari mereka habis dibagi 3, dan sekurang-kurangnya dua dari mereka adalah genap. Dari dua bilangan genap, sekurang-kurangnya satu adalah sebuah perkalian dari 4. Jadi, hasil itu adalah sebuah perkalian dari $2 \times 3 \times 4 = 24$.

77. Suatu bilangan disebut palindrome jika dibaca dari depan atau belakang sama. Contoh, 77, 99, 232, 545, 2332,3663. Untuk semua bilangan palidrome yang berdigit empat ternyata bisa dibagi ….

A. 37 B. 13 C. 11 D. 7 E. 3

Solusi: [C]

Misalnya bilangan palindrome itu "*abba*", sehingga bentuk ini dapat diuraikan sebagai berikut.

$abba = 1000a + 100b + 10b + a = 1001a + 110b = 11(91a + 10b)$

Jadi, terbukti bilangan paliderome 4 digit habis dibagi 11.

78. Bilangan yang terdiri dari 5 digit $a679b$ (basis 10) habis dibagi 72. Dapatkah Anda menentukan nilai a^b?

A. 4 B. 6 C. 9 D. 16 E. 25

Solusi: [C]

Karena 72 adalah faktor dari 8×9, maka bentuk $79b$ harus habis dbagi 8, sehingga akan diperoleh nilai $b = 2$, dan karena $a6792$ habis dibagi 9 , maka $a + 6 + 7 + 9 + 2 = 9$ atau $a + 24 = 9$ atau $a + 6 = 9$, sehingga didapat $a = 3$.

Jadi, nilai $a^b = 3^2 = 9$.

79. Perbedaan dari dua bilangan bulat kuadrat adalah 924. Carilah banyak pasangan (a,b) yang mungkin.

A. 6 B. 5 C. 4 D. 3 E. 2

Solusi: [C]

$a^2 - b^2 = 924$

$(a + b)(a - b) = 2^2 \times 3 \times 7 \times 11$

Hasil kali $(a + b)$ dan $(a - b)$ harus genap, dengan $(a + b) > (a - b)$, sehingga kemungkinan-kemungkinannya adalah

$a + b$	$a - b$
462	2
154	6
66	14
42	22

Penyelesaian secara simultan (serentak) dari setiap sistem persamaannya menghasilkan.

a	232	80	40	32
b	230	74	26	10

Jadi, banyak pasangan (a,b) yang mungkin adalah 4.

80. Jika $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ac$ untuk bilangan-bilangan real a, b, dan c, maka haruslah ….

A. $a = 2b$ B. $a = 2c$ C. $a \neq b \neq c$ D. $a = -b$ E. $a = b = c$

Solusi: [E]

$a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ac$

$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ac = 0$

$a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 + a^2 - 2ac + c^2 = 0$

$(a - b)^2 + (b - c)^2 + (a - c)^2 = 0$

Karena a, b, dan c bilangan-bilangan real, maka

$a - b = 0$, $b - c = 0$, dan $a - c = 0$

$a = b$, $b = c$, dan $a = c$

Jadi, $a = b = c$