Solusi Pengayaan Matematika
Edisi 8

Nomor Soal: 71-80

71. Jumlah dari $1^3+3^3+5^3+...+(2n-1)^3$ dinyatakan sebagai an^4+bn^2. Nilai dari $(a+b)^{2007}$ adalah ….

A. 3^{2007} B. 2^{2007} C. 1 D. 0 E. -1

Solusi: [C]

Kita mengetahui bahwa $1^3+2^3+3^3+...+n^3=(1+2+3+...+n)^2=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$

$$1^3+2^3+3^3+...+(2n)^3=\left[\frac{2n}{2}(2n+1)\right]^2=n^2(2n+1)^2$$

$$2^3+4^3+6^3+...+(2n)^3=2^3\left(1^3+2^3+3^3+...+n^3\right)=8\times\frac{1}{4}n^2(n+1)^2=2n^2(n+1)^2$$

$$\therefore 1^3+3^3+5^3+...+(2n-1)^3=n^2(2n+1)^2-2n^2(n+1)^2=n^2\left[(2n+1)^2-2(n+1)^2\right]$$

$$=n^2\left(4n^2+4n+1-2n^2-4n-2\right)=n^2\left(2n^2-1\right)=2n^4-n^2=an^4+bn^2$$

Karenanya $a=2$ dan $b=-1$.

Jadi, nilai $(a+b)^{2007}=(2-1)^{2007}=1$

72. Jika n adalah bilangan asli sehingga $\frac{3+4+...+3n}{5+6+...+5n}=\frac{4}{11}$, maka dari $\frac{2+3+...+2n}{4+5+...+4n}=....$

A. $\frac{27}{106}$ B. $\frac{27}{53}$ C. $\frac{2}{15}$ D. $\frac{7}{106}$ E. $\frac{15}{106}$

Solusi: [A]

Kita sederhanakan pembilang dan penyebut ruas kiri,

$$k+(k+1)+...+kn=\frac{1}{2}[kn(kn+1)-k(k-1)]=\frac{1}{2}[k(n+1)(kn-k+1)]$$

$$\frac{3+4+...+3n}{5+6+...+5n}=\frac{4}{11}$$

$$\frac{\frac{1}{2}[3(n+1)(3n-3+1)]}{\frac{1}{2}[5(n+1)(5n-5+1)]}=\frac{4}{11}$$

$$\frac{3(n+1)(3n-2)}{5(n+1)(5n-4)}=\frac{4}{11}$$

$$\frac{3n-2}{5n-4}=\frac{20}{33}$$

$$99n-66=100n-80$$

$$n=14$$

$$\frac{2+3+...+2n}{4+5+...+4n}=\frac{\frac{1}{2}\left[2(14+1)(2\cdot 14-2+1)\right]}{\frac{1}{2}\left[4(14+1)(4\cdot 14-4+1)\right]}=\frac{\frac{1}{2}\left[2(15)(27)\right]}{\frac{1}{2}\left[4(15)(53)\right]}=\frac{27}{106}$$

73. Jika $a_{n+1}=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{a_n}}$ $\left(n=1,2,3,...,2008\right)$ dan $a_1=1$, maka nilai $a_1a_2+a_2a_3+a_3a_4+...+a_{2007}a_{2008}$ adalah ….

A. 1 B. $\dfrac{1}{2008}$ C. $\dfrac{2007}{2008}$ D. $\dfrac{2006}{2007}$ E. $\dfrac{2006}{2008}$

Solusi: [C]

Untuk n = 1, 2, 3, …, 2008, sehingga

$$a_{n+1}=\frac{1}{1+\frac{1}{a_n}}$$

$$a_{n+1}=\frac{a_n}{a_n+1}$$

$$a_na_{n+1}+a_{n+1}=a_n$$

$$a_na_{n+1}=a_n-a_{n+1}$$

Karenanya,

$$a_1a_2+a_2a_3+a_3a_4+...+a_{2007}a_{2008}=\left(a_1-a_2\right)+\left(a_2-a_3\right)+\left(a_3-a_4\right)+...+\left(a_{2007}-a_{2008}\right)$$

$$=a_1-a_{2008}$$

Dari rumus $a_{n+1}=\dfrac{a_n}{a_n+1}$ kita juga mendapatkan $a_2=\dfrac{1}{2}$, $a_3=\dfrac{1}{3}$, $a_4=\dfrac{1}{4}$, …

Asumsikan $a_{n-1}=\dfrac{1}{n-1}$, maka diperoleh $a_n=\dfrac{a_{n-1}}{a_{n-1}+1}=\dfrac{\frac{1}{n-1}}{\frac{1}{n-1}+1}=\dfrac{1}{1+n-1}=\dfrac{1}{n}$, karena itu

$a_{2008}=\dfrac{1}{2008}$, dan $a_1a_2+a_2a_3+a_3a_4+...+a_{2007}a_{2008}=a_1-a_{2008}=1-\dfrac{1}{2008}=\dfrac{2007}{2008}$

74. Jika u_n adalah suku ke-n dari barisan 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, …, maka u_{n+2} adalah ….

A. $4n-6$ B. $3n-1$ C. $5n-8$ D. $3n+5$ E. $5n+3$

Solusi 1: [D]

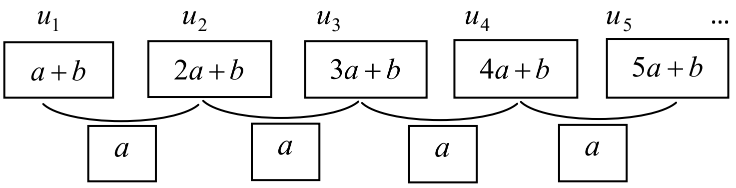
Barisan 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, … adalah barisan aritmetika, dengan $a=2$, $b=5-2=3$

Suku ke-n barisan aritmetika adalah $u_n=a+(n-1)b$, sehingga $u_n=2+(n-1)3=3n-1$.

Jadi, $u_{n+2}=3\left(n+2\right)-1=3n+5$

Solusi 2: [D]

Misalnya suku ke-n adalah $u_n=an+b$



Bentuk barisan ini dinamakan barisan aritmetika tingkat 1 (level 1).

Dengan demikian,

$$\begin{array}{ccccccccccc} u_1 & & u_2 & & u_3 & & u_4 & & u_5 & & \dots \\ \boxed{2} & & \boxed{5} & & \boxed{8} & & \boxed{11} & & \boxed{14} & & \\ & \boxed{3} & & \boxed{3} & & \boxed{3} & & \boxed{3} & & & \end{array}$$

Sehingga diperoleh $\begin{cases} a+b=2 \\ a=3 \end{cases}$

$$\begin{aligned} a=3 \rightarrow\ a+b&=2 \\ 3+b&=2 \\ b&=-1 \end{aligned}$$

Suku ke-n adalah $u_n = 3n-1$.

Jadi, $u_{n+2} = 3(n+2)-1 = 3n+5$

75. Diberikan barisan $a_1, a_2, a_3, \dots$ memenuhi relasi $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$ dan $a_2 = 2$. Jika jumlah dari 1996 suku pertama adalah 2000, ,maka jumlah dari 2000 suku pertama adalah ….

A. 1996 B. 1994 C. 1990 D. -1994 E. -1996

Solusi: [D]

$a_{n+3} = a_{n+2} - a_{n+1} = (a_{n+1} - a_n) - a_{n+1} = -a_n$

(Ilustrasi: $a_4 = -a_1$, $a_5 = -a_3$, $a_6 = -a_3$, dan sebagainya)

Berdasarkan uraian di atas, maka kita mudah memahami bahwa jumlah enam suku berturutan sebarang adalah 0. Karena $a_2 = 2$, maka

$2000 = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{1996}$

$2000 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$

$2000 = a_2 + a_3$

$2000 = 2 + a_3$

$a_3 = 1998$

$a_1 = a_2 - a_3 = 2 - 1998 = -1996$

$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2000} = a_1 + a_2 = -1996 + 2 = -1994$

76. Suku ke-n dari barisan 4, 12, 26, 46, 72, 104, … adalah u_n. Nilai dari $u_{40} - u_{30} = \dots$.

A. 2.900 B. 2.100 C. 2.090 D. 2019 E. 1.900

Solusi: [C]

Misalnya suku ke-n adalah $u_n = an^2 + bn + c$

$$\begin{array}{ccccccccccc} u_1 & & u_2 & & u_3 & & u_4 & & u_5 & & \dots \\ \boxed{a+b+c} & & \boxed{4a+2b+c} & & \boxed{9a+3b+c} & & \boxed{16a+4b+c} & & \boxed{25a+5b+c} & & \\ & \boxed{3a+b} & & \boxed{5a+b} & & \boxed{7a+b} & & \boxed{9a+b} & & & \\ & & \boxed{2a} & & \boxed{2a} & & \boxed{2a} & & & & \end{array}$$

Bentuk barisan ini dinamakan barisan aritmetika tingkat 2 (level 2).

Dengan demikian,

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
u_1 & & u_2 & & u_3 & & u_4 & & u_5 & & \ldots \\
\boxed{4} & & \boxed{12} & & \boxed{26} & & \boxed{46} & & \boxed{72} & & \\
& \boxed{8} & & \boxed{14} & & \boxed{20} & & \boxed{26} & & & \\
& & \boxed{6} & & \boxed{6} & & \boxed{6} & & & &
\end{array}
$$

Sehingga diperoleh $\begin{cases} a+b+c=4 \\ 3a+b=8 \\ 2a=6 \end{cases}$

$2a=6 \Leftrightarrow a=3$

$a=3 \rightarrow 3a+b=8$

$3\cdot 3+b=8$

$b=8-9=-1$

$a=3$ dan $b=-1 \rightarrow a+b+c=4$

$3-1+c=4$

$c=4-2=2$

Suku ke-*n* adalah $u_n = 3n^2 - n + 2$.

Jadi, $u_{40}-u_{30} = 3\cdot 40^2 - 40 + 2 - 3\cdot 30^2 + 30 - 2 = 3\left(40^2-30^2\right) - 10 = 3\cdot 70\cdot 10 - 10 = 2.090$

77. Jumlah dari $1^2+3^2+5^2+...+(2n-1)^2$ dinyatakan sebagai $\frac{1}{a}n(bn+1)(cn-1)$. Nilai dari $a^{b^c} = ...$

A. 7 B. 12 C. 27 D. 64 E. 81

Solusi: [E]

Gunakan rumus: $1^2+2^2+3^2+...+n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

$1^2+2^2+3^2+...+(2n)^2 = \frac{1}{6}\times 2n(2n+1)(4n+1) = \frac{1}{3}n(2n+1)(4n+1)$

$2^2+4^2+6^2+...+(2n)^2 = 2^2\left(1^2+2^2+3^2+...+n^2\right) = \frac{4}{6}n(n+1)(2n+1) = \frac{2}{3}n(n+1)(2n+1)$

$\therefore 1^2+3^2+5^2+...+(2n-1)^2 = \frac{1}{3}n(2n+1)(4n+1) - \frac{2}{3}n(n+1)(2n+1) = \frac{1}{3}n(2n+1)(4n+1-2n-2)$

$= \frac{1}{3}n(2n+1)(2n-1) = \frac{1}{a}n(bn+1)(cn-1)$

Karenanya $a=3$ dan $b=c=2$.

Jadi, nilai dari $a^{b^c} = 3^{2^2} = 81$.

78. Suku ke-*n* dari barisan 9, 35, 101, 225, 425, 719, … dinyatakan sebagai $u_n = an^3+bn^2+cn+d$. Nilai dari $a+b+c+d = ...$

A. 11 B. 10 C. 9 D. 8 E. 7

Solusi: [C]

Misalnya suku ke-*n* adalah $u_n = an^3 + bn^2 + cn + d$

u_1	u_2	u_3	u_4	...
$a+b+c+d$	$8a+4b+2c+d$	$27a+9b+3c+d$	$64a+16b+4c+d$	

$7a+3b+c \qquad 19a+5b+c \qquad 37a+7b+c$

$12a+2b \qquad 18a+2b$

$6a$

Bentuk barisan ini dinamakan barisan aritmetika tingkat 3 (level 3).

Dengan demikian,

u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	...
9	35	101	225	425	

26   66   124   200

40   58   76

18   18

Sehingga diperoleh $\begin{cases} a+b+c+d=9 \\ 7a+3b+c=26 \\ 12a+2b=40 \\ 6a=18 \end{cases}$

$6a = 18 \Leftrightarrow a = 3$

$a = 3 \rightarrow 12a + 2b = 40$

$12 \cdot 3 + 2b = 40$

$2b = 40 - 36 = 4$

$b = 2$

$a = 3$ dan $b = 2 \rightarrow 7a + 3b + c = 26$

$7 \times 3 + 3 \times 2 + c = 26$

$c = 26 - 21 - 6 = -1$

$a = 3$, $b = 2$ dan $c = -1 \rightarrow a + b + c + d = 9$

$3 + 2 - 1 + d = 9$

$d = 9 - 4 = 5$

Suku ke-*n* adalah $u_n = 3n^3 + 2n^2 - n + 5 = an^3 + bn^2 + cn + d$.

Karenanya $a = 3, b = 2, c = -1, \text{dan}\, d = 5$.

Jadi, nilai dari $a + b + c + d = 3 + 2 - 1 + 5 = 9$.

79. Jika $\dfrac{1^3 + 3^3 + 5^3 + ... + (2n-1)^3}{2^3 + 4^3 + 6^3 + ... + (2n)^3} = \dfrac{199}{242}$, maka nilai dari $2000 + \sqrt{n^2 - 6n + 9}$ adalah ….

A. 2004   B. 2005   C. 2006   D. 2007   E. 2008

Solusi: [D]

$$\frac{1^3+3^3+5^3+...+(2n-1)^3}{2^3+4^3+6^3+...+(2n)^3}=\frac{199}{242}$$

$$\frac{n^2(2n^2-1)}{2n^2(n+1)^2}=\frac{199}{242}$$

$$242(2n^2-1)=398(n+1)^2$$

$$484n^2-242=398n^2+796n+398$$

$$86n^2-796n-640=0$$

$$43n^2-398n-320=0$$

$$(43n+32)(n-10)=0$$

$n=-\frac{32}{43}$ (ditolak) atau $n=10$ (diterima)

Jadi, nilai dari $2000+\sqrt{n^2-6n+9}=2000+\sqrt{10^2-6\cdot 10+9}=2000+\sqrt{49}=2007$

80. Jika N menyatakan jumlah bilangan asli dari 1 hingga 800 yang bersisa 1 jika dibagi 3. Jumlah angka-angka dari bilangan N adalah ….

A. 25 B. 20 C. 15 D. 14 E. 13

Solusi: [C]

Bilangan-bilangan asli yang dimaksud adalah 1, 4, 7, 10, 13, …, 799.

$a=1$, $b=7-4=3$, dan $u_n=799$

$$u_n=a+(n-1)b$$

$$799=1+(n-1)3$$

$$799=3n-2$$

$$3n=801$$

$$n=267$$

Jadi, banyak bilangan asli dari 1 hingga 800 yang bersisa 1 jika dibagi 3 adalah 267.

Dari barisan tersebut diketahui $a=1$, $n=267$, dan $u_n=u_{333}=799$

$$S_n=\frac{n}{2}(a+u_n)$$

$$S_{267}=\frac{267}{2}(1+799)=106.800$$

Sehingga $N=106.800$.

Jadi, jumlah angka-angka dari bilangan N adalah 1 + 0 + 6 + 8 + 0 + 0 =15