Solusi Pengayaan Matematika
Edisi 8

Nomor Soal: 71-80

71. Diberikan $f(x) = (x+2)^4 - 8(x+2)^3 + 24(x+2)^2 - 32(x+2) + 16$. Tentukan nilai dari $f(2006)$.

A. 2006^5 B. 2006^4 C. 2006^3 D. 2006^2 E. 2006

Solusi: [B]

$x^2 = [(x+p)-p]^2 = (x+p)^2 - 2(x+p)p + p^2$

$x^3 = [(x+p)-p]^3 = (x+p)^3 - 3(x+p)^2 p + 3(x+p)p^2 + p^3$

$x^4 = [(x+p)-p]^4 = (x+p)^4 - 4(x+p)^3 p + 6(x+p)^2 p^2 - 4(x+p)p^3 + p^4$

Persamaan pada baris terakhir identik dengan fungsi, maka nilai $p = 2$ dan $f(x) = x^4$.

$f(2006) = 2006^4$.

72. Diberikan f adalah fungsi bilangan real yang didefinisikan untuk semua bilangan real. f ditentukan oleh kondisi sebagai berikut ini.

$f(xy) = f(x)f(y)$

$f(x+y) = f(x) + f(y)$ untuk semua bilangan real x dan y.

Tentukanlah nilai dari $f(2006)$.

A. 2008 B. 2007 C. 2006 D. 2005 E. 1003

Solusi: [C]

Untuk $x = y = 0$ memberikan:

$f(0) = f(0) + f(0)$

$f(0) = 0$

Asumsikan bahwa $f(x_0) \neq 0$ untuk semua x_0, maka $f(x_0) = f(1)f(x_0)$, sehingga:

$f(1) = 1$, $f(2) = f(1) + f(1) = 2$, $f(3) = f(2) + f(1) = 3$, $\ldots$,

$f(i) = f(i-1) + f(1) = i$, untuk setiap bilangan bulat positif.

$f(2006) = 2006$

73. Untuk semua bilangan bulat x, fungsi $f(x)$ memenuhi $f(x+1) = \dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}$.

Jika $f(1) = 2$, maka nilai dari $f(2006) = \ldots.$

A. -3 B. $-\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{3}$ D. 2 E. 3

Solusi: [D]

$$f(x+1)=\frac{1+f(x)}{1-f(x)}$$

$$f(1)=2$$

$$f(2)=\frac{1+f(1)}{1-f(1)}=\frac{1+2}{1-2}=-3$$

$$f(3)=\frac{1+f(2)}{1-f(2)}=\frac{1-3}{1+3}=-\frac{1}{2}$$

$$f(4)=\frac{1+f(3)}{1-f(3)}=\frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}$$

$$f(5)=\frac{1+f(4)}{1-f(4)}=\frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=2=f(1)$$

Dengan demikian, $f(n+4)=f(n)$, sehingga

$$f(2006)=f(2001)=...=f(1)=2$$

74. Diberikan fungsi $f(x)=x^4+3x^3-6x^2+2x+1$. Jika hasil dari $f\left(3+\sqrt{2}\right)$ dinyatakan dalam bentuk $a+b\sqrt{c}$, berapakah nilai $a-b+c$?

A. 456 B. 269 C. 185 D. 86 E. 2

Solusi: [D]

$$f(x)=x^4+3x^3-6x^2+2x+1=\{[(x+3)x-6]x+2\}x+1$$

$$f\left(3+\sqrt{2}\right)=\left\{\left[\left(3+\sqrt{2}+3\right)\left(3+\sqrt{2}\right)-6\right]\left(3+\sqrt{2}\right)+2\right\}\left(3+\sqrt{2}\right)+1$$

$$=\left\{\left[\left(6+\sqrt{2}\right)\left(3+\sqrt{2}\right)-6\right]\left(3+\sqrt{2}\right)+2\right\}\left(3+\sqrt{2}\right)+1$$

$$=\left\{\left[\left(20+9\sqrt{2}\right)-6\right]\left(3+\sqrt{2}\right)+2\right\}\left(3+\sqrt{2}\right)+1$$

$$=\left[\left(14+9\sqrt{2}\right)\left(3+\sqrt{2}\right)+2\right]\left(3+\sqrt{2}\right)+1$$

$$=\left(60+41\sqrt{2}+2\right)\left(3+\sqrt{2}\right)+1$$

$$=\left(62+41\sqrt{2}\right)\left(3+\sqrt{2}\right)+1$$

$$=268+185\sqrt{2}+1$$

$$=269+185\sqrt{2}=a+b\sqrt{c}$$

Karena itu, $a = 269, b = 185, \text{dan} c = 2$, sehingga $a - b + c = 269 - 185 + 2 = 86$

75. Diberikan bahwa $f(x) = \left(x^4 + 2x^3 + 4x - 5\right)^{2006} + 2006$. Jika $f\left(\sqrt{3} - 1\right) = d$, tentukan nilai *d*.

A. 2010 B. 2007 C. 2006 D. 2005 E. 2003

Solusi: [B]

$x = \sqrt{3} - 1$

$x + 1 = \sqrt{3}$

$(x+1)^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2$

$x^2 + 2x + 1 = 3$

$x^2 + 2x - 2 = 0$

Dengan pembagian:

$x^4 + 2x^3 + 4x - 5 = \left(x^2 + 2x - 2\right)\left(x^2 + 2\right) - 1 = (0)\left(x^2 + 2\right) - 1 = 0 - 1 = -1$.

$d = f\left(\sqrt{3} - 1\right) = \left(x^4 + 2x^3 + 4x - 5\right)^{2006} + 2006 = (-1)^{2011} + 2006 = 2007$

76. Jika $f(n) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$, maka $f(r) - f(r-1)$ adalah …

A. $r^2 + 1$ B. $r^2 - r$ C. $r^2 + r$ D. $r^2 + 2r$ E. $2r^2 + r$

Solusi: [C]

Ini adalah latihan dalam memfaktorkan, karena *r* dan *r* +1 adalah faktor sekutu dari $f(r)$ dan $f(r-1)$.

$$f(r) - f(r-1) = \frac{1}{3}r(r+1)(r+2) - \frac{1}{3}(r-1)(r)(r+1) = \frac{1}{3}r(r+1)[r + 2 - (r-1)]$$

$$= \frac{1}{3}r(r+1)(3) = r^2 + r$$

77. Jika $f(x) = \frac{1}{x}$, maka $f(p) - f(q) = ...$

A. $f\left(\frac{pq}{q-p}\right)$ B. $f\left(\frac{q-p}{pq}\right)$ C. $f(pq)$ D. $f(p-q)$ $f\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$

Solusi: [A]

$$f(p) - f(q) = \frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{q-p}{pq} = \frac{1}{\frac{pq}{q-p}} = f\left(\frac{pq}{q-p}\right)$$

78. Jika $x = \frac{1}{2} + \sqrt{3}$, maka nilai dari $x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 4x^2 - 10x - 6$ adalah ....

A. $\sqrt{2}$ B. 2 C. $2\sqrt{2}$ D. 4 E. $3\sqrt{2}$

Solusi:

$x=\frac{1}{2}+\sqrt{3}$

$2x=1+2\sqrt{3}$

$2x-1=2\sqrt{3}$

$4x^2-4x+1=12$

$4x^2-4x-11=0$

$$\begin{aligned}4x^5-11x^4-3x^3-12x^2-14x+20&=\left(4x^2-4x-11\right)\left(x^3+2x-1\right)+4x-2\\&=(0)\left(x^3+2x-1\right)+4\left(\frac{1}{2}+\sqrt{3}\right)-2\\&=4\sqrt{3}\end{aligned}$$

79. Diberikan $f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=3x$, dengan $x\neq 0$. Jika $f(x)=f(-x)$, maka himpunan penyelesaian dari persamaan ini adalah ….

A. $\left\{-\sqrt{2},\sqrt{2}\right\}$ B. $\{-2,2\}$ C. $\{2\}$ D. $\left\{-\sqrt{2}\right\}$ E. $\left\{\sqrt{2}\right\}$

Solusi:

$$\begin{array}{l|c|l} f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=3x & \times 1 & \Leftrightarrow f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=3x \\ f\left(\frac{1}{x}\right)+2f(x)=\frac{3}{x} & \times 2 & \Leftrightarrow 2f\left(\frac{1}{x}\right)+4f(x)=\frac{6}{x} \end{array}$$

$$-3f(x)=3x-\frac{6}{x}\quad -$$

$$f(x)=-x+\frac{2}{x}$$

$f(x)=f(-x)$

$-x+\frac{2}{x}=x-\frac{2}{x}$

$2x-\frac{4}{x}=0$

$2x^2-4=0$

$x^2=2$

$x=\pm\sqrt{2}$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\left\{-\sqrt{2},\sqrt{2}\right\}$.

80. Jika f adalah fungsi yang didefinisikan sebagai $\begin{cases} f(0) = 5 \\ f(0) = 3 \\ f(n+2) = 3f(n) + f(n+1) \end{cases}$,

nilai dari $f(5)$ adalah ….

A. 18 B. 27 C. 81 D. 162 E. 192

Solusi: [D]

Jika $n = 0$ maka $f(0+2) = 3f(0) + f(0+1)$

$f(2) = 3f(0) + f(1) = 3(5) + 3 = 18$

Jika $n = 1$ maka $f(1+2) = 3f(1) + f(1+1)$

$f(3) = 3f(1) + f(2) = 3(3) + 18 = 27$

Jika $n = 2$ maka $f(2+2) = 3f(2) + f(2+1)$

$f(4) = 3f(2) + f(3) = 3(18) + 27 = 81$

Jika $n = 3$ maka $f(3+2) = 3f(3) + f(3+1)$

$\therefore f(5) = 3f(3) + f(4) = 3(27) + 81 = 162$