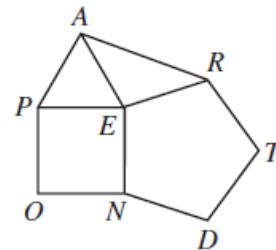


PENGAYAAN MATEMATIKA

SOLUSI GEOMETRI 7

1. COMC, 2002

A regular pentagon is a five-sided figure which has all of its angles equal and all of its side lengths equal. In the diagram, *TREND* is a regular pentagon, *PEA* is an equilateral triangle, and *OPEN* is a square. Determine the size of $\angle EAR$.



Solusi:

$$\angle PEA = 60^\circ$$

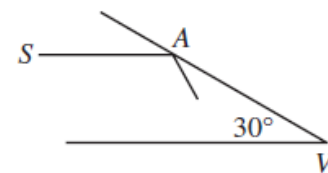
$$\angle PEN = 90^\circ$$

$$\angle REN = 180^\circ - \frac{360^\circ}{5} = 108^\circ$$

$$\angle EAR = 360^\circ - (60 + 90 + 108)^\circ = 102^\circ$$

2. COMC, 2002

Two mirrors meet at an angle of 30° at the point *V*. A beam of light, from a source *S*, travels parallel to one mirror and strikes the other mirror at point *A*, as shown. After a number of reflections, the beam comes back to *S*. If *SA* and *AV* are both 1 metre in length, determine the total distance travelled by the beam.



Solusi:

$$SA = AV = 1$$

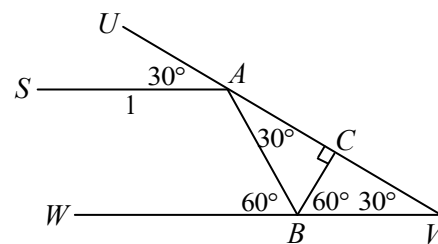
Dengan mengingat hukum Snellius, sudut datang Sama dengan sudut pantul. Cahaya dari *S* mengenai cermin di *A* lalu dipantulkan ke *B* kemudian ke *C*, sehingga lintasanya adalah *SA*, *AB*, dan *BC*.

Karena $\triangle ABC$ sama kaki, maka $AC = CV = \frac{1}{2}$.

$$AB = \frac{AC}{\cos 30^\circ} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

$$BC = AC \tan 30^\circ = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}\sqrt{3} = \frac{1}{6}\sqrt{3}$$

$$\text{Jadi, total jaraknya} = 2(SA + AB + BC) = 2\left(1 + \frac{1}{3}\sqrt{3} + \frac{1}{6}\sqrt{3}\right) = 2\left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = (2 + \sqrt{3}) \text{ m.}$$



3. COMC, 2002

Square $ABCD$ has vertices $A(0,0)$, $B(0,8)$, $C(8,8)$, and $D(8,0)$. The points $P(0,5)$ and $Q(0,3)$ are on side AB , and the point $F(8,1)$ is on side CD .

- What is the equation of the line through Q parallel to the line through P and F ?
- If the line from part (a) intersects AD at the point G , what is the equation of the line through F and G ?
- The centre of the square is the point $H(4,4)$. Determine the equation of the line through H perpendicular to FG .
- A circle is drawn with centre H that is tangent to the four sides of the square. Does this circle intersect the line through F and G ? Justify your answer. (A sketch is *not* sufficient justification.)

Solusi:

- (a) Gradien garis PF adalah $m_{PF} = \frac{1-5}{8-0} = -\frac{1}{2}$

Persamaan garis yang melalui Q dan sejajar dengan garis yang melalui P dan F adalah

$$y-3 = -\frac{1}{2}(x-0)$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 3$$

- (b) Garis $y = -\frac{1}{2}x + 3$ memotong sumbu X

(garis AD) jika $y = 0$, sehingga

$$-\frac{1}{2}x + 3 = 0$$

$$x = 6$$

Koordinat titik G adalah $(6,0)$.

Gradien garis GF adalah $m_{GF} = \frac{1-0}{8-6} = \frac{1}{2}$

Persamaan garis yang melalui G dan F adalah

$$y-0 = \frac{1}{2}(x-6)$$

$$y = \frac{1}{2}x - 3$$

- (c) Syarat dua garis saling tegak lurus adalah $m_1 m_2 = -1$, sehingga

$$\frac{1}{2} m_2 = -1$$

$$m_2 = -2$$

Persamaan garis yang melalui $H(4,4)$ dan gradien $m_2 = -2$ adalah

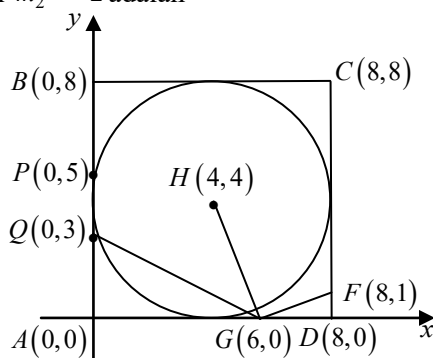
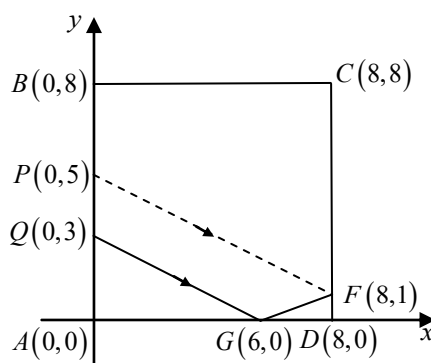
$$y-4 = -2(x-4)$$

$$y = -2x + 12$$

- (d) Menentukan perpotongan garis-garis HG dan GF .

$$-2x + 12 = \frac{1}{2}x - 3$$

$$-4x + 24 = x - 6$$



$$-5x = -30$$

$$x = 6$$

$$y = \frac{1}{2} \times 6 - 3 = 0$$

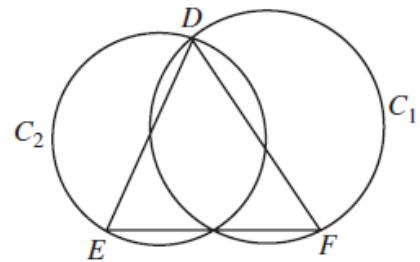
Garis-garis HG dan GF bertongan tepat di titik G dengan koordinat $G(6,0)$.

Jarak titik G ke titik H adalah $GH = \sqrt{(4-6)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

Karena jari-jari lingkaran adalah 4 sedangkan jarak dari pusat lingkaran $H(4,4)$ terhadap garis FG adalah $2\sqrt{5}$, maka lingkaran tidak memotong garis yang melalui F dan G .

4. COMC, 2002

Triangle DEF is acute. Circle C_1 is drawn with DF as its diameter and circle C_2 is drawn with DE as its diameter. Points Y and Z are on DF and DE respectively so that EY and FZ are altitudes of $\triangle DEF$. EY intersects C_1 at P , and FZ intersects C_2 at Q . EY extended intersects C_1 at R , and FZ extended intersects C_2 at S . Prove that $P, Q, R,$ and S are concyclic points.



Solusi:

Misalnya $DZ = a$, $EZ = b$, dan $SZ = c$.

Menurut Pythagoras dalam $\triangle SZD$,

$$DS^2 = SZ^2 + DZ^2 = c^2 + a^2 \dots (1)$$

Dalam $\triangle DSE$ siku-siku di $\angle DSE = 90^\circ$ (menghadap busur DQE dengan DE diameter lingkaran C_2), sehingga $\triangle DSZ \sim \triangle SED$, maka

$$\frac{DZ}{SZ} = \frac{SZ}{EZ}$$

$$\frac{a}{c} = \frac{c}{b}$$

$$c^2 = ab \dots (2)$$

Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh

$$DS^2 = ab + b^2 = b(a + b) = DZ \cdot DE$$

Dengan cara yang sama dalam $\triangle DRF$ diperoleh bahwa $DY^2 = DY \cdot DF$.

Selanjutnya, karena $\angle EZF = \angle EYF = 90^\circ$, maka EF harus merupakan diameter lingkaran yang melalui titik-titik $Z, Y, E,$ dan F .

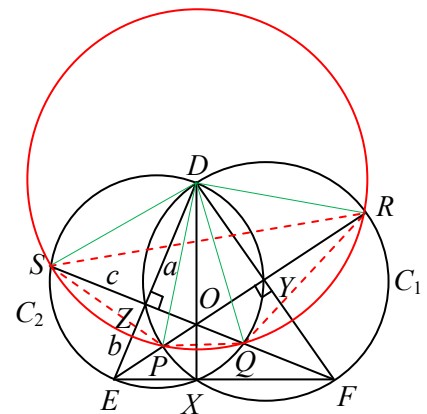
Karenanya DE dan DF adalah garis potong lingkaran yang memotong lingkaran pada Z dan Y , menurut teorema garis potong lingkaran: $DZ \cdot DE = DY \cdot DF$.

Berdasarkan uraian di atas kita dapat menyimpulkan bahwa $DS^2 = DR^2$ atau $DS = DR$, dan $DP = DQ = DR = DS$.

Karena $DP = DQ = DR = DS$, maka dapat disimpulkan bahwa P, Q, R, S adalah konsiklis (terletak pada segi empat tali busur $PQRS$). (QED)

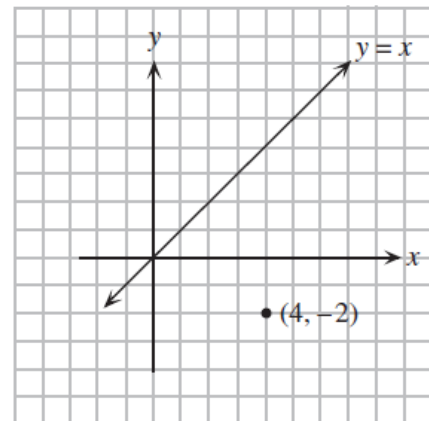
Catatan:

Segiempat tali busur adalah segiempat yang jumlah sudut-sudut berhadannya adalah 180° .



5. COMC, 2003

The point $(4, -2)$ is reflected in the x -axis. The resulting point is then reflected in the line with equation $y = x$. What are the coordinates of the final point?



Solusi:

Matriks pencerminan terhadap sumbu x dan garis $y = x$ = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ dan $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Jadi, bayangannya adalah $(2, 4)$.