Solusi Pengayaan Matematika
Edisi 7

Nomor Soal: 61-70

61. Suatu dadu ditos 6 kali. Banyak cara memperoleh mata yang muncul 28 dengan tepat satu dadu muncul mata 6 adalah ....

Solusi:

Ada 3 kemungkinan susunan jumlah mata dadu = 28 dengan angka 6 muncul tepat sekali, yaitu

Susunan dadu $(6,5,5,5,5,2) \rightarrow$ Banyak susunan $\frac{6!}{4!} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{4!} = 30$

Susunan dadu $(6,5,5,5,4,3) \rightarrow$ Banyak susunan $\frac{6!}{3!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3!} = 120$

Susunan dadu $(6,5,5,4,4,4) \rightarrow$ Banyak susunan $\frac{6!}{2! \times 3!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{2 \times 1 \times 3!} = 60$

Dengan demikian, banyak cara memperoleh mata yang muncul 28 dengan tepat satu dadu muncul mata 6 adalah 30 + 120 + 60 = 210.

62. Buktikan bahwa ${}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + {}_nC_3 + ... + {}_nC_n = 2^n$

Bukti:

$$(a+b)^n = {}_nC_0 a^n + {}_nC_1 a^{n-1} b^1 + {}_nC_2 a^{n-2} b^2 + {}_nC_3 a^{n-3} b^3 + ... + {}_nC_n b^n$$

Misalnya $a = 1$ dan $b = 1$, sehingga

$$(1+1)^n = {}_nC_0 \cdot 1^n + {}_nC_1 \cdot 1^{n-1} \cdot 1^1 + {}_nC_2 \cdot 1^{n-2} \cdot 1^2 + {}_nC_3 \cdot 1^{n-3} \cdot 1^3 + ... + {}_nC_n \cdot 1^n$$

$$2^n = {}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + {}_nC_3 + ... + {}_nC_n \quad \text{(terbukti)}$$

63. Carilah angka terakhir dari 5!, 6!, 7!, …, 1999!, dengan $n! = 1 \times 2 \times 3 \times ... \times (n-1) \times n$.

Solusi:

Angka terakhir dari 5!, 6!, 7!, …, 1999! Masing-masing adalah 0.

Jumlah angka satuan dari 1! + 2! + 3! + 4! + 5! +…+1999! = 1 + 2 + 6 + 4 + 0 + … + 0 = 13

Jadi, angka terakhir dari 1! + 2! + 3! + … + 1999! adalah 3.

64. Carilah jumlah koefisien x^{18} dan x^{17} dari penjabaran $(1 + x^5 + x^7)^{20}$.

Solusi:

$$(1 + x^5 + x^7)^{20} = [1 + (x^5 + x^7)]^{20} = 1 + {}_{20}C_1(x^5 + x^7) + {}_{20}C_2(x^5 + x^7)^2 + {}_{20}C_3(x^5 + x^7)^3 + ... + (x^5 + x^7)^{20}$$

Koefisien x^{18} dan x^{17} didapat dari suku ${}_{20}C_3(x^5 + x^7)^3$, maka

$${}_{20}C_3(x^5 + x^7)^3 = \frac{20!}{3!(20-3)!}(x^{15} + 3x^{17} + 3x^{19} + x^{21}) = 1140(x^{15} + 3x^{17} + 3x^{19} + x^{21})$$

Koefisien x^{18} = 0 dan koefisien x^{17} = 1140 × 3 = 3420.

Jadi, jumlah koefisien x^{18} dan x^{17} dari penjabaran $(1 + x^5 + x^7)^{20}$ = 0 + 3420 = 3420.

65. Tersedia tiga bejana, sebuah bejana 8 liter penuh air, sebuah bejana 5 liter kosong, dan sebuah bejana 3 liter kosong. Terangkan proses penuangan air berurutan dari bejana ke bejana yang berakhir dangan 4 liter air di bejana 8 liter, dan 4 liter air di bejana 5 liter. (pada bejana tidak ada

tanda ukuran, jadi segala yang dapat anda lakukan adalah mengosongkan sebuah bejana lengkap ke dalam bejana lain, atau mengisi bejana hingga kapsitasnya penuh)

Solusi:

Kiranya serasi untuk menyajikan masalah kedudukan air dengan tri rangkap terurut (a, b, c), dengan a, b, dan c adalah banyaknya air (dalam liter) masing-masing di bejana 8 liter, bejana 5 liter dan bejana 3 liter. Kedudukan awal adalah (8, 0, 0). Salah satu barisan yang menyelesaikan persoalan ini adalah

$(8,0,0) \to (3,5,0) \to (3,2,3) \to (6,2,0) \to (6,0,2) \to (1,5,2) \to (1,4,3) \to (4,4,0)$

66. Buktikan bahwa ${}_nC_0 - {}_nC_1 + {}_nC_2 - {}_nC_3 + ... \pm {}_nC_n = 0$

Bukti:

$(a+b)^n = {}_nC_0a^n + {}_nC_1a^{n-1}b^1 + {}_nC_2a^{n-2}b^2 + {}_nC_3a^{n-3}b^3 + ... + {}_nC_nb^n$

Misalnya $a = 1$ dan $b = -1$, sehingga

$(1-1)^n = {}_nC_0 \cdot 1^n + {}_nC_1 \cdot 1^{n-1} \cdot (-1)^1 + {}_nC_2 \cdot 1^{n-2} \cdot (-1)^2 + {}_nC_3 \cdot 1^{n-3} \cdot (-1)^3 + ... + {}_nC_n \cdot (-1)^n$

$0 = {}_nC_0 - {}_nC_1 + {}_nC_2 - {}_nC_3 + ... \pm {}_nC_n$ (terbukti)

67. Buktikan bahwa ${}_nC_1 + {}_nC_3 + {}_nC_5 + ... = 2^{n-1}$

Bukti:

$(a+b)^n = {}_nC_0a^n + {}_nC_1a^{n-1}b^1 + {}_nC_2a^{n-2}b^2 + {}_nC_3a^{n-3}b^3 + ... + {}_nC_nb^n$

Misalnya $a = 1$ dan $b = -1$, sehingga

$(1-1)^n = {}_nC_0 \cdot 1^n + {}_nC_1 \cdot 1^{n-1} \cdot (-1)^1 + {}_nC_2 \cdot 1^{n-2} \cdot (-1)^2 + {}_nC_3 \cdot 1^{n-3} \cdot (-1)^3 + ... + {}_nC_n \cdot (-1)^n$

$0 = {}_nC_0 - {}_nC_1 + {}_nC_2 - {}_nC_3 + ... \pm {}_nC_n$

${}_nC_0 + {}_nC_2 + {}_nC_4 + ... = {}_nC_1 + {}_nC_3 + {}_nC_5 + ...$

Kita mengetahui bahwa

${}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + {}_nC_3 + ... = 2^n$

$2({}_nC_1 + {}_nC_3 + {}_nC_5 + ...) = 2^n$

${}_nC_1 + {}_nC_3 + {}_nC_5 + ... = 2^{n-1}$ (terbukti)

68. Enam orang siswa akan duduk pada tiga meja bundar, dimana tiap meja akan diduduki oleh minimal oleh satu siswa. Banyaknya cara untuk melakukan hal tersebut adalah ....

Solusi:

Kita mengetahui banyak cara duduk n orang di meja bundar adalah $(n-1)!$

Ada 3 kemungkinan susunan duduk 6 siswa.

Susunan (4,1,1) $\to$ Banyaknya susunan $\frac{{}_6C_4 \times {}_2C_1 \times {}_1C_1 \times (4-1)!}{2!} = 90$

Susunan (3,2,1) $\to$ Banyaknya susunan ${}_6C_3 \times {}_3C_2 \times {}_1C_1 \times (1-1)!(2-1)! = 120$

Susunan (2,2,2) $\to$ Banyaknya susunan $\frac{{}_6C_2 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2}{3!} = 15$

Jadi, banyaknya cara untuk melakukan hal tersebut adalah 90 + 120 + 15 = 225.

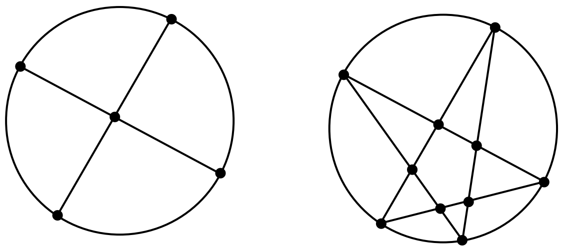
69. Ada berapa cara suatu kelompok yang terdiri 7 orang yang dapat diatur antar mereka
   a. dalam baris yang terdiri dari 7 kursi?
   b. mengelilingi meja berbentuk lingkaran?

Solusi:

a. Tujuh orang dapat diatur antar mereka dalam baris dengan
   $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 7! = 5.040$ cara

b. Satu orang dapat duduk di suatu tempat di sekeliling meja. Enam yang lain dapat diatur mengelilingi meja dalam $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 6! = 720$ cara.

70. Tinjau n buah titik pada lingkaran. Jika setiap 2 pasang titik dihubungkan dengan sebuah ruas garis, carilah banyaknya titik potong yang ada di dalam lingkaran itu.



Solusi:

Pada kasus n = 4 dan n = 5, sebuah titik potong dihasilkan oleh 4 buah titik pada lingkaran. Jadi, banyak titik potong yang terjadi sama dengan banyak kombinasi 4 dari n, yaitu ${}_nC_4$.