Solusi Pengayaan Matematika

Edisi 7

Nomor Soal: 61-70

61. Tentukan suku pada uraian $\left(2x^3+3xy^2+z^2\right)^6$ yang mengandung x^{11} dan y^4.

Solusi:

Suku umum $=\binom{6}{a,b,c}\left(2x^3\right)^a\left(3xy^2\right)^b\left(z^2\right)^c=\binom{6}{a,b,c}2^a x^{3a}3^b x^b y^{2b}z^{2c}=\binom{6}{a,b,c}2^a 3^b x^{3a+b}y^{2b}z^{2c}$

Jadi, suku yang mengandung x^{11} dan y^4 adalah $3a+b=11$ dan $2b=4$ atau $b=2$ dan $a=3$. Karena $a+b+c=6$, maka kita memperoleh $c = 1$. Dengan demikian,

$$\binom{6}{3,2,1}2^3 3^2 x^{11}y^4z^2=\frac{6!}{3!2!1!}\times 8\times 9x^{11}y^4z^2=4320x^{11}y^4z^2$$

62. Sebuah kotak berisi 7 kartu yang diberi nomor 1 sampai dengan 7. Apabila 3 kartu diambil sekaligus, carilah peluang bahwa pengambilan ketiga kartu bergantian dari (ganjil, genap, ganjil) atau (genap, ganjil, genap).

Solusi:

Peluang pengambilan pertama ganjil $\left(\frac{4}{7}\right)$, kedua genap $\left(\frac{3}{6}\right)$, dan ketiga ganjil $\left(\frac{3}{5}\right)$ adalah $\left(\frac{4}{7}\right)\left(\frac{3}{6}\right)\left(\frac{3}{5}\right)=\frac{6}{35}$.

Peluang pengambilan pertama genap $\left(\frac{3}{7}\right)$, kedua ganjil $\left(\frac{4}{6}\right)$, dan ketiga ganjil $\left(\frac{2}{5}\right)$ adalah $\left(\frac{3}{7}\right)\left(\frac{4}{6}\right)\left(\frac{2}{5}\right)=\frac{4}{35}$.

Jadi, peluang yang diminta adalah $\frac{6}{35}+\frac{4}{35}=\frac{2}{7}$.

Solusi 2:

Kemungkinan banyaknya urutan dari 7 nomor diambil 3 sekaligus $={}_7P_3=7\times 6\times 5=210$.

Banyaknya urutan di mana bilangan-bilangan bergantian dari ganjil, genap, ganjil $=4\times 3\times 3=36$

Banyaknya urutan di mana bilangan-bilangan bergantian dari genap, ganjil, genap $=3\times 4\times 2=24$

Jadi, peluang yang diminta adalah $\frac{36+24}{210}=\frac{2}{7}$.

63. Jika $5\times{}_nP_3=24\times{}_nC_4$, carilah nilai n.

Solusi:

$$5\times{}_nP_3=24\times{}_nC_4$$

$$5\times\frac{n!}{(n-3)!}=24\times\frac{n!}{4!(n-4)!}$$

$$5\times\frac{1}{(n-3)(n-4)!}=24\times\frac{1}{4\times 3\times 2\times 1\times(n-4)!}$$

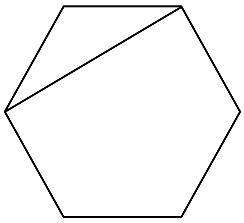
$$5=n-3$$

$n = 8$

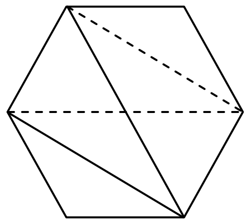
64. Diberikan segi-6 beraturan, berapa banyak segitiga dapat dibentuk sedemikian sehingga setiap titik-titiknya adalah juga titik dari segi banyak itu?

Solusi:

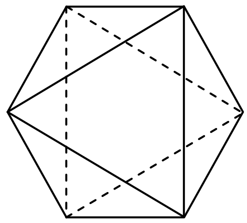
Banyak segitiga yang diminta $= {}_6C_3 = \dfrac{6!}{3!(6-3)!} = \dfrac{6\times5\times4\times3!}{3\times2\times1\times3!} = 20$ buah



6 kasus



12 kasus



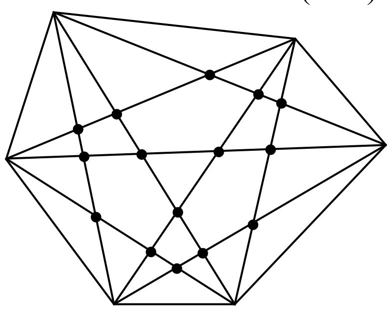
2 kasus

65. Diberikan segi banyak dengan n sisi dan diagonalnya digambarkan. Asumsikan tidak ada 3 diagonal yang melalui satu titik, berapa banyak titik yang berpotongan di dalam segi banyak itu? Carilah banyak titik potong diagonal yang berpotongan di dalam segi-6?

Solusi:

Banyak titik potong diagonal di dalam segi-n itu $= {}_nC_4$

Banyak titik potong diagonal di dalam segi-6 $= {}_6C_4 = \dfrac{6!}{4!(6-4)!} = \dfrac{6\times5\times4!}{4!\times2\times1} = 15$ buah.



66. Suatu delegasi terdiri dari 4 orang. Ada 4 orang laki-laki dan 6 orang perempuan yang mencalonkan diri untuk menjadi anggota delegasi. Jika dipersyaratkan bahwa paling sedikit seorang anggota delegasi itu harus perempuan, carilah banyak cara memilih anggota delegasi itu.

Solusi:

Total banyaknya cara pemilihan 4 dari 10 adalah ${}_{10}C_4 = \dfrac{10!}{4!(10-4)!} = \dfrac{10\times9\times8\times7\times6!}{4\times3\times2\times1\times6!}$

= 210 cara

Banyak cara pemilihan 4 sedemikian rupa, sehingga perempuan tidak termasuk adalah

${}_{10-6}C_4 = {}_4C_4 = 1$ cara.

Kemudian banyaknya cara pemilihan 4 anggota sedemikian rupa, sehingga sekurang- kurangnya 1 perempuan termasuk adalah ${}_{10}C_4 - {}_4C_4 = 210 - 1 = 209$ cara.

67. Berapa banyak nol pada akhir dari 1987!? ($n! = n\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots\times3\times2\times1$)

Solusi:

Setiap nol menunjukkan perkalian dari 10 (2 × 5).

$\frac{1987}{5}$, $\frac{1987}{5^2}$, $\frac{1987}{5^3}$, $\frac{1987}{5^4}$ masing-masing adalah 397, 79, 15, 3.

Jadi, banyak nol pada akhir dari 1987! = 397 + 79 + 15 + 3 = 494.

68. Dalam berapa carakah 3 perempuan dapat dipilih dari 15 perempuan.

(a) Apabila 1 perempuan dimasukkan dalam setiap pemilihan.

(b) Apabila 2 perempuan dikeluarkan dalam setiap pemilihan.

(c) Apabila 1 perempuan selalu dimasukkan dan 2 perempuan selalu dikeluarkan.

Solusi:

a. Karena 1 perempuan selalu dimasukkan, kita harus memilih 2 dari 14 perempuan, sehingga banyaknya cara $= {}_{14}C_2 = \frac{14\times 13}{2\times 1} = 91$ cara.

b. Karena 2 perempuan selalu dikeluarkan, kita harus memilih 3 dari 13 perempuan, sehingga banyaknya cara $= {}_{13}C_3 = \frac{13\times 12\times 11}{3\times 2\times 1} = 286$ cara.

c. Banyaknya cara $= {}_{15-1-2}C_{3-1} = {}_{12}C_2 = \frac{12\times 11}{2\times 1} = 66$ cara.

69. Carilah nilai n dari persamaan ${}_nP_3 = 6\times {}_nC_5$.

Solusi:

$${}_nP_3 = 6\times {}_nC_5$$

$$\frac{n!}{(n-3)!} = 6\times \frac{n!}{5!(n-5)!}$$

$$\frac{1}{(n-3)(n-4)(n-5)!} = 6\times \frac{1}{5\times 4\times 3\times 2\times 1\times (n-5)!}$$

$$\frac{1}{(n-3)(n-4)} = \frac{1}{20}$$

$$(n-3)(n-4) = 20$$

$$n^2 - 7n - 8 = 0$$

$$(n-8)(n+1) = 0$$

$n = 8$ (diterima) atau $n = -1$ (ditolak)

Jadi, nilai n yang diminta adalah 8.

70. Tulis dalam bentuk faktorial

a. 18×17 b. $\frac{1}{23\times 22\times 21}$ c. 42

Solusi:

a. $18\times 17 = \frac{18\times 17\times 16!}{16!} = \frac{18!}{16!}$

b. $\frac{1}{23\times 22\times 21} = \frac{20!}{23\times 22\times 21\times 20!} = \frac{20!}{23!}$

c. $42 = \frac{42\times 41!}{41!} = \frac{42!}{41!}$ atau $42 = 7\times 6 = \frac{7\times 6\times 5!}{5!} = \frac{7!}{5!}$