Solusi Pengayaan Matematika
Edisi 6

Nomor Soal: 51-60

51. Bagaimanakah cara meperoleh rumus $\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$?

Solusi:
Kita mulai dengan bentuk dasar
$(k + 1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1$
$(k + 1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$
Jika kita memberi nilai k mulai dari 1, 2, 3, …, n; maka diperoleh
$2^3 - 1^3 = 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1$
$3^3 - 2^3 = 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1$
$4^3 - 3^3 = 3 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 + 1$
……………………………
$(n + 1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1$
Jika seluruhnya dijumlahkan, maka diperoleh
$(n + 1)^3 - 1^3 = 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) + 3(1 + 2 + 3 + \ldots + n) + (1 + 1 + \ldots + 1)$

$$(n+1)^3 - 3\left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right) - 3\left(\sum_{k=1}^{n} k\right) + n$$

$$3\left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right) = (n+1)^3 - 1 - 3\left(\sum_{k=1}^{n} k\right) - n \; = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 1 - 3\frac{n(n+1)}{2} - n \; = n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right) = \frac{n}{6}(2n^2 + 3n + 1) \; = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

52. Hitung hasil dari $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + ... + 2005^2 - 2006^2 + 2007^2 - 2008^2 + 2009^2$

Solusi 1:

$$A = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + ... + 2005^2 - 2006^2 + 2007^2 - 2008^2 + 2009^2$$
$$= (1^2 - 2^2) + (3^2 - 4^2) + (5^2 - 6^2) + ... + (2005^2 - 2006^2) + \left(2007^2 - 2008^2\right) + 2009^2$$
$$= (1-2)(1+2) + (3-4)(3+4) + ... + (2007-2008)(2007+2008) + 2009^2$$
$$= (-1)(3) + (-1)(7) + (-1)(11) + ... + (-1)(4015) + 2009^2$$
$$= (-1)(3 + 7 + 11 + ... + 4015) + 2009^2$$

Perhatikan bahwa 3 + 7 + 11 + … + 4015 adalah deret aritmetika, dengan $a = 3$, $b = 7 - 4 = 4$, dan $u_n = 4015$, sehingga

$$u_n = a + (n-1)b$$
$$4015 = 3 + (n-1) \times 4$$
$$n = \frac{4015 - 3}{4} + 1 = 1004$$
$$S_n = \frac{n}{2}(a + u_n)$$

$S_{1004} = \frac{1004}{2}(3+4015) = 1004 \times 2009$

$A = (-1)S_{1004} + 2009^2 = (-1)(1004 \times 2009) + 2009^2 = 2009(2009-1004) = 2.019.045$

Jadi, hasil dari $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + ... + 2005^2 - 2006^2 + 2007^2 - 2008^2 + 2009^2$ adalah $2.019.045$.

Solusi 2:

$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + ... + 2005^2 - 2006^2 + 2007^2 - 2008^2 + 2009^2$

$= (1^2 - 2^2) + (3^2 - 4^2) + (5^2 - 6^2) + ... + (2007^2 - 2008^2) + 2009^2$

$= (1-2)(1+2) + (3-4)(3+4) + ... + (2007-2008)(2007+2008) + 2009^2$

$= (-1)(3) + (-1)(7) + (-1)(11) + ... + (-1)(4015) + 2009^2$

$= -1 - 2 - 3 - 4 - ... - 2007 - 2008 + 2009^2$

$= \frac{2008}{2}\left(-1-2008\right) + 2009^2 = 2009\left(-1004+2009\right) = 2.019.045$

Solusi 3:

$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + ... + 2005^2 - 2006^2 + 2007^2 - 2008^2 + 2009^2$

$= 1^2 + \left(-2^2 + 3^2\right) + \left(-4^2 + 5^2\right) + ... + \left(-2008^2 + 2009^2\right)$

$= 1 + \left(-2+3\right)\left(2+3\right) + \left(-4+5\right)\left(4+5\right) + ... + \left(-2008+2009\right)\left(2008+2009\right)$

$= 1 + 5 + 9 + ... + 4017$

Perhatikan bahwa 1 + 5 + 9 + … + 4017 adalah deret aritmetika dengan $a = 1$, $b = 5 - 1 = 4$, dan $u_n = 4017$, sehingga

$u_n = a + (n-1)b$

$4017 = 1 + (n-1)4$

$4016 = 4n - 4$

$4n = 4020$

$n = 4020 : 4 = 1005$

$S_n = \frac{n}{2}\left(a + u_n\right)$

$S_{1005} = \frac{1005}{2}\left(1 + 4017\right) = 2.019.045$

Jadi, hasil dari $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + ... + 2005^2 - 2006^2 + 2007^2 - 2008^2 - 2009^2$ adalah $2.019.045$.

Solusi 4:

Kita mengetahui bahwa $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n\left(n+1\right)\left(2n+1\right)}{6}$

$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + ... + 2005^2 - 2006^2 + 2007^2 - 2008^2 + 2009^2$

$= 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 2009^2 - 2\left(2^2 + 4^2 + 6^2 + ... + 2008^2\right)$

$= 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 2009^2 - 8\left(1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 1004^2\right)$

$= \frac{2009\left(2009+1\right)\left(2 \cdot 2009 + 1\right)}{6} - 8 \times \frac{1004\left(1004+1\right)\left(2 \cdot 1004 + 1\right)}{6}$

$= 2.704.847.285 - 2.702.828.240 = 2.019.045$

53. Tentukanlah bilangan bulat positif terkecil yang diperlihatkan pada barisan aritmetika berikut.
    5, 16, 27, 38, 49, 60, 71, …
    7, 20, 33, 46, 59, 72, 85, …

8, 22, 36, 50, 64, 78, 92, …

Solusi:

Beda pada setiap barisan aritmetika tersebut adalah 11, 13, dan 14. Jika sebuah bilangan positif n terjadi pada masing-masing barisan, maka $n + 11 \times 13 \times 14 = n + 2002$.

Sekarang kita lihat setiap barisan ke belakang.

–6, 5, 16, 27, 38, 49, 60, 71, …

–6, 7, 20, 33, 46, 59, 72, 85, …

–6, 8, 22, 36, 50, 64, 78, 92, …

Jadi, bilangan bulat positif terkecil pada barisan aritmetika tersebut = –6 + 2002 = 1996.

54. Diketahui rumus umum suatu deret: $a_{n+1} = 3a_n + 4$, $n \geq 0$, dan $a_0 = 2$. Tentukanlah a_{2009}.

Solusi:

$a_1 = 3 \cdot 2 + 4$

$a_2 = 3\,(3 \cdot 2 + 4) + 4 = 3^2 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 4$

$a_3 = 3(3^2 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 4) + 4 = 3^3 \cdot 2 + 3^2 \cdot 4 + 3 \cdot 4 + 4$

Sehingga untuk a_n dapat ditulis dalam bentuk

$a_n = 3^n \cdot 2 + (3^{n-1} + 3^{n-2} + \ldots + 3^2 + 3 + 1)4$

Dengan menggunakan rumus jumlah deret geometri diperoleh

$$a_n = 3^n \cdot 2 + \frac{(3^n - 1)4}{3 - 1} \quad a_n = 3^n \cdot 2 + \frac{\left(3^n - 1\right)4}{3 - 1} = 3^n \cdot 2 + 2\left(3^n - 1\right) = 8 \cdot 3^n - 2$$

Jadi, nilai dari $a_{2009} = 8 \cdot 3^{2009} - 2$.

55. Diberikan $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ adalah sebuah barisan bilangan real sedemikian, sehingga $a_1 = 1$, $4a_n a_{n+1} = (a_n + a_{n+1} - 1)^2$, $a_n < a_{n+1}$. Tentukanlah a_n.

Solusi:

Perhitungan langsung menghasilkan:

$a_1 = 1$

$n = 1 \rightarrow\ 4a_1 a_2 = (a_1 + a_2 - 1)^2$

$4 \times 1 \times a_2 = (1 + a_2 - 1)^2$

$4a_2 = a_2^2$

$a_2(a_2 - 4) = 0$

$a_2 = 0$ (ditolak) atau $a_2 = 4$ (diterima)

$n = 2 \rightarrow\ 4a_2 a_3 = (a_2 + a_3 - 1)^2$

$4 \times 4 \times a_3 = (4 + a_3 - 1)^2$

$16a_3 = 9 + 6a_3 + a_3^2$

$a_3^2 - 10a_3 + 9 = 0$

$(a_3 - 1)(a_3 - 9) = 0$

$a_3 = 1$ (ditolak) atau $a_3 = 9$ (diterima)

Dengan demikian, $a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $a_3 = 9$, sehingga secara sugesti bahwa $a_n = n^2$.

Fakta ini dapat kita buktikan dengan induksi, sebagai berikut.

Pertama ia benar untuk $n = 1$.

Kedua untuk setiap n, maka $a_n = n^2$.

Ketiga untuk $n + 1$, maka

$$4n^2a_{n+1} = \left(n^2 + a_{n+1} - 1\right)^2$$
$$4n^2a_{n+1} = \left(a_{n+1}\right)^2 + 2\left(n^2 - 1\right)a_{n+1} + \left(n^2 - 1\right)^2$$
$$4n^2a_{n+1} = \left(a_{n+1}\right)^2 + 2n^2a_{n+1} - 2a_{n+1} + \left(n^2 - 1\right)^2$$
$$\left(a_{n+1}\right)^2 - 2n^2a_{n+1} - 2a_{n+1} + \left(n^2 - 1\right)^2 = 0$$
$$\left(a_{n+1}\right)^2 - \left(2n^2 + 2\right)a_{n+1} + \left(n^2 - 1\right)^2 = 0$$
$$\left\{a_{n+1} - (n+1)^2\right\}\left\{a_{n+1} - (n-1)^2\right\} = 0$$
$a_{n+1} = (n+1)^2$ atau $a_{n+1} = (n-1)^2$

Karena $a_n < a_{n+1}$, $a_{n+1} = (n+1)^2$.

Jadi, $a_n = n^2$.

56. Sebuah barisan $x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...$ didefinisikan oleh $x_1 = 1$ dan $x_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)x_n + \frac{1}{n}$ untuk setiap bilangan bulat positif *n*. Tentukanlah x_{2009}.

Solusi:
$$x_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)x_n + \frac{1}{n}$$
$$x_{n+1} + 1 = \left(1 + \frac{1}{n}\right)x_n + \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$
$$x_{n+1} + 1 = \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(x_n + 1\right)$$
$$x_{2009} + 1 = \frac{2009}{2008}\left(x_{2008} + 1\right) = \frac{2009}{2008} \times \frac{2008}{2007} \times ... \times \frac{2}{1}\left(x_1 + 1\right) = 2009 \times 2 = 4018$$
$$x_{2009} = 4018 - 1 = 4017$$

57. Hitunglah nilai dari $1^3 - 2^3 + 3^3 - ... - 2008^3 + 2009^3$.

Solusi:

Kita mengetahui bahwa**:** $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + (n-1)^3 + n^3 = \left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]^2$

$$1^3 - 2^3 + 3^3 - ... - 2008^3 + 2009^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + 2006^3 + 2009^3 - 2\left(2^3 + 4^3 + 6^3 + ... + 2008^3\right)$$
$$= \left[\frac{1}{2} \times 2009(2009 + 1)\right]^2 - 2 \times 2^3\left(1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + 1004^3\right) = (2009 \times 1005)^2 - 16\left[\frac{1}{2} \times 1004(1004 + 1)\right]^2$$
$$= (2009 \times 1005)^2 - (2 \times 1004 \times 1005)^2 = 1005^2\left(2009^2 - 2008^2\right) = 1005^2(2009 + 2008)(2009 - 2008)$$
$$= 1005^2 \times 4017 = 4.057.270.425$$

58. Jika $a_0, a_1, ..., a_{50}$ adalah polinomial $\left(1 + x + x^2\right)^{25}$, buktikan bahwa $a_0 + a_1 + ... + a_{50}$ adalah genap.

Bukti:

Misalnya $x = 1$ dan berikan ke dalam persamaan:
$$\left(1 + x + x^2\right)^{25} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{50}x^{50}$$
Kita mendapatkan bahwa:

$3^{25} = a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_{50} .... (1)$

Ambilah $x = -1$ dan berikan ke dalam persamaan:

$\left(1+x+x^2\right)^{25}=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_{50}x^{50}$

Kita mendapatkan bahwa:

$1=a_0-a_1+a_2-a_3+...+a_{50}$ …. (2)

Jumlahkan persamaan (1) dan (2), kita memperoleh:

$1+3^{25}=2\left(a_0+a_2+a_4+...+a_{50}\right)$

Tetapi

$1+3^{25}=3^{25}-1+2$

$1+3^{25}=(3-1)\left(3^{24}+3^{23}+3^{22}+...+1^{24}\right)+2$

$1+3^{25}=2\left(3^{24}+3^{23}+3^{22}+...+1+1\right)$

Perhatikan bahwa bentuk terakhir ini menunjukkan bilangan genap. Akibat ini adalah bahwa $a_0+a_1+...+a_{50}$ adalah genap. (qed).

59. Untuk semua bilangan bulat positif n, diberikan $u_{n+1}=\dfrac{n(n+1)}{2n-u_n}$ dan $u_1=a$. Nyatakan u_n dalam a dan n.

Solusi:

Observasi bahwa:

$$u_2=\frac{1(1+1)}{2\cdot 1-u_1}=\frac{2}{2-a}$$

$$u_3=\frac{2(2+1)}{2\cdot 2-u_2}=\frac{6}{4-\dfrac{2}{2-a}}=\frac{3(2-a)}{3-2a}=3\left(1+\frac{a-1}{3-2a}\right)$$

$$u_4=\frac{4(4+1)}{2\cdot 3-u_3}=\frac{20}{6-\dfrac{3(2-a)}{3-2a}}=\frac{4(3-2a)}{4-3a}=4\left(1+\frac{a-1}{4-3a}\right)$$

Berdasarkan pola tersebut diperoleh $u_n=n\left(1+\dfrac{a-1}{n-(n-1)a}\right)$.

Kita dapat membuktikan ini menggunakan induksi matematika sebagai berikut.

Untuk n = 1, kita memperoleh $u_1=1\left(1+\dfrac{a-1}{1-(1-1)a}\right)=a$

Sekarang untuk $n=k$ persamaan itu benar. $u_k=k\left(1+\dfrac{k-1}{k-(k-1)a}\right)$

Untuk $n=k+1$, maka persamaan itu menjadi:

$$u_{k+1}=\frac{k(k+1)}{2k-u_k}=\frac{k(k+1)}{2k-k\left(1+\dfrac{k-1}{k-(k-1)a}\right)}=\frac{(k+1)[k-(k-1)a]}{k-(k-1)a-a+1}=(k+1)\left(1+\frac{a-1}{k+1-ka}\right)$$

Jadi, untuk setiap bilangan bulat n berlaku $u_n=n\left(1+\dfrac{a-1}{n-(n-1)a}\right)$.

60. Diberikan $a_n=\dfrac{\log(n+1)}{\log n}$ untuk n = 2, 3, 4, …, 1023. Jika $\displaystyle\sum_{n=2}^{1023}\frac{1}{{}^{a_n}\log 100}=\frac{p}{q}$ dengan p dan q adalah bilangan bulat positif dan tidak memiliki faktor persekutuan selain 1. Tentukanlah nilai dari $p+q$.

Solusi:

$a_n = \frac{\log(n+1)}{\log n} \rightarrow a_n = {}^{n}\log(n+1)$

$a_2 \times a_3 \times a_4 \times ... \times a_{1023} = {}^{2}\log 3 \times {}^{3}\log 4 \times {}^{4}\log 5 \times ... \times {}^{1023}\log 1024 = {}^{2}\log 1024 = 2\log 2^{10} = 10$

$\sum_{n=2}^{1023} \frac{1}{{}^{a_n}\log 100} = \frac{p}{q}$

$\sum_{n=2}^{1023} {}^{100}\log a_n = \frac{p}{q}$

${}^{100}\log a_2 + {}^{100}\log a_3 + ... + {}^{100}\log a_{1023} = \frac{p}{q}$

${}^{100}\log(a_2 \times a_3 \times a_4 \times ... \times a_{1023}) = \frac{p}{q}$

${}^{100}\log({}^{2}\log 1024) = \frac{p}{q}$

${}^{100}\log 10 = \frac{p}{q}$

$\frac{1}{2} = \frac{p}{q}$

Jadi, $p + q = 1 + 2 = 3$