Solusi Pengayaan Matematika
Edisi 6

Nomor Soal: 51-60

51. Jumlah n bilangan positif kelipatan 3 adalah 360. Berapakah nilai n?

A. 28 B. 24 C. 18 D. 15 E. 14

Solusi: [D]

$3+6+9+\ldots=360$

$\frac{n}{2}\left[2a+(n-1)b\right]=360$

$n(3n+3)=720$

$3n^2+3n-720=0$

$n^2+n-240=0$

$(n-15)(n+16)=0$

$n=15$ (diterima) atau $n=-16$ (ditolak)

52. Gunakan data barisan geometri $r=\frac{1}{4}$ dan $S_4=148\frac{3}{4}$ untuk menentukan suku ketiga.

A. 1 B. 3 C. 5 D. 6 E. 7

Solusi: [E]

$S_4=\frac{a\left(1-r^4\right)}{1-r}$

$\frac{595}{4}=\frac{a\left(1-\frac{1}{4^4}\right)}{1-\frac{1}{4}}$

$\frac{3(595)}{16}=a\left(1-\frac{1}{256}\right)$

$\frac{3(595)}{16}=\frac{255}{256}a$

$a=\frac{3(595)}{16}\times\frac{256}{255}=7\times16$

$u_3=ar^2=7\times16\times\frac{1}{4^2}=7$

53. Barisan bilangan bulat positif, $\{a_n\}$, didefinisikan rekursif sebagai $a_1=k+1$ dan $a_n=ka_{n-1}+1$ dan $n>1$ dan k adalah konstanta bulat positif. Jika a_4 adalah kuadrat sempurna dan $N=\frac{80320}{a_k}$, tentukan jumlah angka-angka bilangan N tersebut.

A. 6 B. 8 C. 10 D. 12 E. 14

Solusi: [C]

Pertama tulislah

$a_2 = ka_1 + 1 = k\left(k+1\right) + 1 = k^2 + k + 1$

$a_3 = ka_2 + 1 = k\left(k^2 + k + 1\right) + 1 = k^3 + k^2 + k + 1$

$a_4 = ka_3 + 1 = k\left(k^3 + k^2 + k + 1\right) + 1 = k^4 + k^3 + k^2 + k + 1$

Karena a_4 adalah kuadrat sempurna, maka ambillah $a_4 = m^2$, sehingga

$k^4 + k^3 + k^2 + k + 1 = m^2$

$k^4 + k^3 + k^2 + k = m^2 - 1$

Yang mengakibatkan

$\left(k^4 + k^2\right) + \left(k^3 + k\right) = m^2 - 1$

$k^2\left(k^2 + 1\right) + k\left(k^2 + 1\right) = m^2 - 1$

$\left(k^2 + k\right)\left(k^2 + 1\right) = \left(m+1\right)\left(m-1\right)$

Kita dapat mengasumsikan bahwa ada nilai *k* yang unik. Jika kita menganggap bahwa dua faktor yang diberikan adalah sama, kemudian mengambil perbedaan mereka untuk melihat bahwa

$\left(k^2 + k\right) - \left(k^2 + 1\right) = \left(m+1\right) - \left(m-1\right) \Leftrightarrow k - 1 = 2 \Leftrightarrow k = 3$

sehingga $a_3 = 3^3 + 3^2 + 3 + 1 = 40$

selanjutnya, $N = \dfrac{80320}{a_k} = \dfrac{80320}{40} = 2008$

Jadi, jumlah angka-angka bilangan *N* tersebut adalah 2 + 0 + 0 + 8 = 10.

54. Tentukan jumlah dari semua nilai untuk "*x*" bahwa 4, *x*, *y*, 18 adalah barisan dengan tiga suku pertama adalah barisan aritmetika dan tiga suku terakhir adalah barisan geometri.

A. 8 B. 9 C. $9\frac{1}{3}$ D. 10 E. 11

Solusi: [D]

$x = 4 + b \Leftrightarrow 2x = 8 + 2b$ .... (1) (*b* adalah beda antara dua suku berurutan)

$y = 4 + 2b$ .... (2)

Dari persamaan (1) dan (2) dipoeroleh

$2x - y = 4$

$y = 2x - 4$ .... (3)

Barisan geometri: *x*, *y*, 18

$\dfrac{y}{x} = \dfrac{18}{y}$

$y^2 = 18x$ .... (4)

Dari persamaan (3) dan (4) diperoleh:

$\left(2x-4\right)^2 = 18x$

$4x^2 - 16x + 16 = 18x$

$4x^2-34x+16=0$

$2x^2-17x+8=0$

$(2x-1)(x-8)=0$

$x=\frac{1}{2}$ atau $x=8$

Jadi, jumlah nilai "x" adalah $\frac{1}{2}+8=8\frac{1}{2}$.

Catatan:

Kita dapat menentukan jumlah nilai "x" langsung dari persamaan kuadrat $2x^2-17x+8=0$ menggunakan rumus $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$, sehingga $x_1+2_2=-\frac{-17}{2}=8\frac{1}{2}$.

55. Sebuah barisan, di mana $a_1=10, a_3=18, a_5=27$ adalah barisan kuadrat di mana setiap suku ke-n dapat dinyatakan dengan $a_n=An^2+Bn+C$. Berapakah nilai 8 kali suku ke-6?

A. 255 B. 288 C. 292 D. 259 E. 225

Solusi: [A]

$y=ax^2+bx+c$

$10=a+b+c$ .... (1)

$18=9a+3b+c$ .... (2)

Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh

$8=8a+2b$ .... (3)

$27=25a+5b+c$ .... (4)

Dari persamaan (2) dan (4) diperoleh

$9=16a+2b$ .... (5)

Dari persamaan (3) dan (5) diperoleh

$1=8a$

$a=\frac{1}{8}$

$a=\frac{1}{8}\to 8=8\cdot\frac{1}{8}+2b \Leftrightarrow b=\frac{7}{2}$

$b=\frac{7}{2}\to 10=\frac{1}{8}+\frac{7}{2}+c \Leftrightarrow c=\frac{51}{8}$

$a_n=\frac{1}{8}n^2+\frac{7}{2}n+\frac{51}{8}$

$a_6=\frac{1}{8}\cdot 6^2+\frac{7}{2}\cdot 6+\frac{51}{8}=\frac{36}{8}+\frac{168}{8}+\frac{51}{8}=\frac{255}{8}$

Jadi, $8a_6=8\times\frac{255}{8}=255$

56. Berapa banyak bilangan antara 1 dan 2013 yang bulat kelipatan 3 atau 4 tetapi bukan 12?

A. 501 B. 668 C. 840 D. 1040 E. 1030

Solusi: [C]

Bagilah 2013 dengan 3 dan abaikan sisanya, sehingga didapat 671. Bagilah 2013 dengan 4 dan abaikan sisanya, sehingga didapat 503. Jumlahkan jawaban ini, sehingga diperoleh 1174. Kemudian harus membagi 2013 dengan 12 dan abaikan sisanya, sehingga diperoleh 167. Tetapi kita tidak menginginkan keduanya, sehingga kita harus mengurangkan dua kali dari 1174, sehingga didapat 1174 – 2 × 167 = 840.

57. Jumlah dua suku pertama deret geometri adalah 90. Jumlah suku ke enam dan ke tujuh adalah $-\frac{10}{27}$. Tentukan jumlah lima suku pertama.

A. $101\frac{2}{3}$ B. $101\frac{1}{3}$ C. $101\frac{1}{6}$ D. $100\frac{2}{3}$ E. $100\frac{1}{3}$

Solusi: [A]

$$a + u_2 = 90$$

$$a\left(1+r\right) = 90 \text{ .... (1)}$$

$$u_6 + u_7 = -\frac{10}{27}$$

$$ar^5 + ar^6 = -\frac{10}{27}$$

$$ar^5\left(1+r\right) = -\frac{10}{27} \text{ .... (2)}$$

Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh

$$90r^5 = -\frac{10}{27}$$

$$r^5 = -\frac{1}{243}$$

$$r = -\frac{1}{3}$$

$$r = -\frac{1}{3} \to a\left(1 - \frac{1}{3}\right) = 90 \Leftrightarrow a = 135$$

$$S_n = \frac{a\left(r^n - 1\right)}{r-1}$$

$$S_7 = \frac{135\left(-\frac{1}{3^5} - 1\right)}{-\frac{1}{3} - 1} = \frac{135\left(-1-243\right)}{-81-243} = \frac{135 \times 244}{324} = \frac{305}{3} = 101\frac{2}{3}$$

58. Diberikan tiga bilangan bulat positif, sehingga setiap hasil dua bilangan adalah unsur yang unik dari $\{48, 72, 96\}$. Berapakah hasil dari ketiga bilangan bulat tersebut?

A. 484 B. 529 C. 576 D. 625 E. 676

Solusi: [C]

Misalnya bilangan-bilangan tersebut adalah *x*, *y*, dan *z*.

Kita mendapatkan sistem $\begin{cases} xy = 24 \\ yz = 27 \\ xz = 32 \end{cases}$.

Hasil kali dari persamaan-persamaan tersebut memberikan:

$$xy \cdot yz \cdot xz = 48 \cdot 72 \cdot 96$$

$\left(xyz\right)^2 = 2^4 \cdot 3 \cdot 2^3 \cdot 3^2 \cdot 2^5 \cdot 3 = 2^{12} \cdot 3^4$

$xyz = \sqrt{2^{12} \cdot 3^4} = 2^6 \cdot 3^2 = 64 \cdot 9 = 576$

59. Hasil kali lima suku pertama deret geometri adalah 32. Jika suku ke empat adalah 1, misalnya A = suku kedua. Jika 1, x, y, adalah barisan geometri dan x, y, 3 adalah barisan aritmetika, ambillah B = nilai maksimum dari $x + y$. Tentukan nilai dari AB.

A. 4 B. 5 C. 10 D. 14 E. 15

Solusi: [D]

$u_4 = ar^3 = 1$

$u_1 \times u_2 \times u_3 \times u_4 \times u_5 = 32$

$\frac{1}{r^3} \times \frac{1}{r^2} \times \frac{1}{r} \times 1 \times r = 32$

$\frac{1}{r^5} = 32$

$r^5 = \frac{1}{32}$

$r = \frac{1}{2}$

$u_2 = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 4 = A$

Barisan geometri: 1, x, y, sehingga $\frac{x}{1} = \frac{y}{x} \Leftrightarrow y = x^2$ .... (1)

Barisan aritmetika: x, y, 3, sehingga $y - x = 3 - y \Leftrightarrow y = \frac{x+3}{2}$ .... (2)

Dari (1) dan (2) diperoleh $x^2 = \frac{x+3}{2} \Leftrightarrow 2x^2 - x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left(2x-3\right)\left(x+1\right) = 0 \Leftrightarrow$

$x = \frac{3}{2} \vee x = -1$

$x = \frac{3}{2} \rightarrow y = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$

$x = -1 \rightarrow y = \left(-1\right)^2 = 1$

Sehingga $x_{\max} = \frac{3}{2}$ dan $y_{\max} = \frac{9}{4}$

$B = x_{\max} + y_{\max} = \frac{3}{2} + \frac{9}{4} = \frac{15}{4}$

Jadi, $AB = 4 \times \frac{15}{4} = 15$

60. Suku ke-3 barisan geometri adalah $\frac{243}{2}$, dan suku ke-12 adalah $\frac{256}{81}$. Jika suku ke-15 dinyatakan dalam $\frac{a}{b}$, tentukan nilai $b - a$.

A. 169 B. 149 C. 140 D. 139 E. 138

Solusi: [A]

$u_{12} = ar^{11} = u_3 r^9$

$\frac{256}{81} = \frac{243}{2} \cdot r^9$

$\frac{256}{81} \cdot \frac{2}{243} = r^9$

$\frac{2^9}{3^9} = r^9$

$r = \frac{2}{3}$

$u_{13} = u_{12} \cdot r = \frac{256}{81} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2048}{2187} = \frac{a}{b}$

Karena itu $a = 2048$ dan $b = 2187$, sehingga $b - a = 2187 - 2048 = 139$