Solusi Pengayaan Matematika
Edisi 6

Nomor Soal: 51-60

51. Jika f suatu fungsi yang memenuhi $f(1)=6$ dan $f\left(x+1\right)=2f\left(x\right)$, tentukan nilai dari $f\left(2007\right)$.

Solusi:

$f(1)=6$ dan $f(x+1)=2f(x)$

$$x=0\rightarrow f(0+1)=2f(0)$$
$$f(1)=2f(0)$$
$$6=2f(0)$$
$$f(0)=3$$
$$x=1\rightarrow f(1+1)=2f(1)$$
$$f(2)=2\cdot 6$$
$$f(2)=12$$
$$x=2\rightarrow f(2+1)=2f(2)$$
$$f(3)=2\cdot 12$$
$$f(3)=24$$

Kita memperoleh barisan geometri sebagai berikut.

$f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, …

3, 6, 12, 24, …

$a=3$, $r=\frac{u_2}{a}=\frac{6}{3}=2$, dan $n=2007$

$$u_n=ar^{n-1}$$

$$\therefore f\left(2007\right)=u_{2007}=3\times 2^{2007-1}=3\times 2^{2006}$$

52. Untuk $x>0$, $y>0$, didefinisikan $f\left(x,y\right)$ adalah nilai terkecil di antara x, $\frac{y}{2}+\frac{2}{x}$, dan $\frac{1}{y}$. Nilai terbesar yang mungkin dicapai oleh $f\left(x,y\right)$ adalah ....

Solusi:

Misalnya $a=x$ dan $b=\frac{1}{y}$, sehingga $a>0$ dan $b>0$

$$f\left(x,y\right)=f\left(a,b\right)=\min\left(a,b,\frac{1}{2b}+\frac{2}{a}\right)$$

Jika $a=b=\frac{1}{2b}+\frac{2}{a}$

$$a=\frac{1}{2a}+\frac{2}{a}$$
$$2a^2=1+4$$
$$a^2=\frac{5}{2}$$

$$a=\sqrt{\frac{5}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{10}$$

$$b=a=\sqrt{\frac{5}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{10}$$

Jika $a\le\frac{1}{2}\sqrt{10}$ atau $b\le\frac{1}{2}\sqrt{10}$, maka $f(x,y)\le\frac{1}{2}\sqrt{10}$

Jika $a>\frac{1}{2}\sqrt{10}$ atau $b>\frac{1}{2}\sqrt{10}$, maka $f(x,y)=\frac{1}{2b}+\frac{2}{a}<\frac{1}{\sqrt{10}}+\frac{4}{\sqrt{10}}=\frac{1}{2}\sqrt{10}$

Sehingga $f(x,y)\le\frac{1}{2}\sqrt{10}$ dengan tanda tak kesamaan terjadi jika $a=b=\frac{1}{2}\sqrt{10}$

Jadi, nilai terbesar yang mungkin dicapai oleh $f(x,y)$ adalah $\frac{1}{2}\sqrt{10}$.

53. Jika $f(x)f(y)-f(xy)=x+y$ untuk semua bilangan real *x* dan *y*, tentukanlah $f(x)$.

Solusi:

$f(x)f(y)-f(xy)=x+y$

Kita ambil $y=0$, maka

$$y=0\to f(x)f(y)-f(xy)=x+y$$
$$f(x)f(0)-f(0)=x+0$$
$$f(0)(f(x)-1)=x\text{, yang mana akibatnya } f(0)\ne 0$$

$$f(x)=\frac{x}{f(0)}+1$$

Sekarang dipilih $x=0$, sehingga diperoleh $f(0)=1$ dan $f(x)=x+1$.

Akhirnya $(x+1)(y+1)-(xy+1)=x+y$.

54. Fungsi *f* didefinisikan untuk semua pasangan bilangan bulat positif sebagai berikut: $f(x,x)=x+2$, $f(x,y)=f(y,x)$, $(x+y)f(x,y)=yf(x,x+y)$. Tentukanlah $f(9,7)$.

Solusi:

Misalnya $z=x+y$, sehingga

$$z=x+y\to (x+y)f(x,y)=yf(x,x+y)$$
$$zf(x,z-x)=(z-x)f(x,z)$$
$$f(x,z)=\frac{z}{z-x}f(x,z-x)$$

$$f(7,9)=\frac{9}{2}f(7,2)=\frac{9}{2}f(2,7)=\frac{9}{2}\times\frac{7}{5}f(2,5)=\frac{9}{2}\times\frac{7}{5}\times\frac{5}{3}f(2,3)=\frac{9}{2}\times\frac{7}{5}\times\frac{5}{3}\times\frac{3}{1}f(2,1)$$
$$=\frac{9}{2}\times\frac{7}{5}\times\frac{5}{3}\times\frac{3}{1}f(1,2)=\frac{9}{2}\times\frac{7}{5}\times\frac{5}{3}\times\frac{3}{1}\times\frac{2}{1}f(1,1)=\frac{9}{2}\times\frac{7}{5}\times\frac{5}{3}\times\frac{3}{1}\times\frac{2}{1}(1+2)=189$$

55. Fungsi *f* memenuhi hubungan $f(n)=f(n-1)f(n-2)$ untuk semua bilangan bulat *n*, dan $f(n)>0$ untuk semua bilangan bulat positif *n*. Jika $f(1)=\frac{f(2)}{512}$ dan $\frac{1}{f(1)}=2f(2)$, hitunglah $f(f(4))$.

Solusi:

$$\frac{1}{f(1)}=2f(2)\Leftrightarrow f(1)=\frac{1}{2f(2)}$$

$$f(1)=\frac{f(2)}{512}$$

$$\frac{1}{2f(2)}=\frac{f(2)}{512}$$

$$[f(2)]^2=256$$

$$f(2)=16$$

$$f(1)=\frac{16}{512}=\frac{1}{32}$$

Gunakan rekursi:

$$f(n)=f(n-1)f(n-2)$$

$$f(3)=f(2)f(1)=16\times\frac{1}{32}=\frac{1}{2}$$

$$f(4)=f(3)f(2)=\frac{1}{2}\times 16=8$$

$$\therefore f(f(4))=f(8)$$

Selanjutnya digunakan rekursi:

$$f(5)=f(4)f(3)=8\times\frac{1}{2}=4$$

$$f(6)=f(5)f(4)=4\times 8=32$$

$$f(7)=f(6)f(5)=32\times 4=128$$

$$f(8)=f(7)f(6)=128\times 32=4096$$

56. Carilah fungsi *f* yang terdefinisi dalam persamaan $x^{-1}f(-x)+f(x^{-1})=x$, untuk semua $x\in R$ dan $x\neq 0$?

Solusi:

Ambillah $x=-y$, sehingga didapat $-y^{-1}f(y)+f(-y^{-1})=-y$, untuk semua nilai $y\neq 0$ …. (1)

Persamaan (1) dikalikan dengan y, sehingga $-f(y)+yf(-y^{-1})=-y^2$ …. (2)

Ambillah $x=y^{-1}$, sehingga $yf(-y^{-1})+f(y)=y^{-1}$, untuk semua nilai $y\neq 0$ …. (3)

Kurangkan persamaan (2) oleh persamaan (3) sehingga didapat

$$2f(y)=y^{-1}+y^2$$

$f(y)=\dfrac{y^3+1}{2y}$, untuk semua nilai $y\neq 0$ atau kita dapat menyatakannya sebagai $f(x)=\dfrac{x^3+1}{2x}$, untuk semua nilai $x\neq 0$

57. Diberikan $f(x)=x^2$. Buktikan $f(x^2+y^2)=f[f(x)]+f[f(x)]+2f(x)f(y)$.

Solusi:

$$f[f(x)]=[f(x)]^2=x^4$$

$$f[f(y)]=[f(y)]^2=y^4$$

$$2f(x)f(y)=2x^2y^2$$

$$f(x^2+y^2)=(x^2+y^2)^2=x^4+y^4+2x^2y^2=f[f(x)]+f[f(x)]+2f(x)f(y) \quad \text{(qed)}$$

58. Tentukan semua fungsi f dan g yang memenuhi persamaan-persamaan $f(2x+1)+2g(2x+1)=2x$ dan $f\left(\frac{x}{x-1}\right)+g\left(\frac{x}{x-1}\right)=x$

Solusi:

Misalnya $u=2x+1$, maka $x=\frac{1}{2}(u-1)$, sehingga persamaan pertama menjadi

$f(u)+2g(u)=u-1$.

Misalnya $u=\frac{x}{x-1}$, maka $x=\frac{u}{u-1}$, sehingga persmaan kedua menjadi

$f(u)+g(u)=\frac{u}{u-1}$

Dari kedua persamaan terakhir ini diperoleh

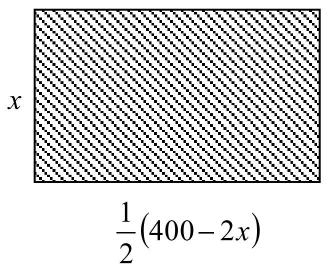
$g(u)=(u-1)-\left(\frac{u}{u-1}\right)=\frac{u^2-3u+1}{u-1}$ dan

$f(u)=\frac{u}{u-1}-\frac{u^2-3u+1}{u-1}=\frac{u^2-4u+1}{1-u}$

59. Panjang seutas kawat baja 400 cm dikonstruksi menjadi persegi panjang, dengan salah satu ukurannya adalah *x*. Tentukanlah luas sebagai fungsi dari *x* dan daerah definisi *x*.

Solusi:

Sisi-sisinya adalah *x* dan $\frac{1}{2}(400-2x)$.



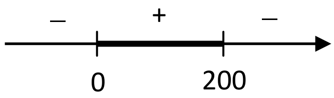
Luas = $f(x)=\frac{1}{2}x(400-2x)$.

Luas harus berharga positif , $x\neq 0$, sehingga

$\frac{1}{2}x(400-2x)>0$

$x(200-x)>0$

$0<x<200$



Jadi, daerah definisi dari *x* adalah $\{x|0<x<200\}$.

60. Diberikan fungsi $(x^2-1)y=1$. Tentukan daerah definisi dan range.

Solusi:

$(x^2-1)y=1 \Leftrightarrow y=\frac{1}{x^2-1}$

Agar *y* bernilai real, maka haruslah $x^2-1\neq 0$ atau $x\neq \pm 1$.

Jadi, $D_f=\{x|x\neq 1, x\neq -1, x\in R\}$.

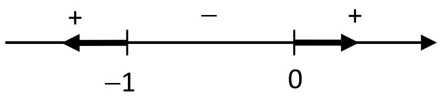
$(x^2-1)y=1 \Leftrightarrow x^2-1=\frac{1}{y}$

$$x^2=\frac{1}{y}+1$$

$$x=\sqrt{\frac{y+1}{y}}$$

Agar nilai *x* real terjamin, maka haruslah

$\frac{y+1}{y} \geq 0$ dengan $y \neq 0$



$y \leq -1$ atau $y > 0$

Jadi, range adalah $R_f = \{y | y \leq -1 \text{ atau } y > 0, y \in R\}$