Solusi Pengayaan Matematika
Edisi 6

Nomor Soal: 51-60

51. Diberikan persamaan kuadrat $x^2 - 2x + {}^{2006}\log n = 0$. Tentukan nilai *n* agar
    a. akar-akarnya real.
    b. akar-akarnya imajiner.

    Solusi:
    Diskriminan persamaan kuadrat adalah
    $$D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot {}^{2006}\log n = 4 - 4\,{}^{2006}\log n$$
    a. Akar-akarnya real, $D \geq 0$
    $$4 - 4\,{}^{2006}\log n \geq 0$$
    $${}^{2006}\log n \leq 1$$
    $${}^{2006}\log n \leq {}^{2006}\log 2006$$
    $$n \leq 2006$$
    b. Akar-akarnya imajiner, $D < 0$
    $$4 - 4\,{}^{2006}\log n < 0$$
    $${}^{2006}\log n > 1$$
    $${}^{2006}\log n > {}^{2006}\log 2006$$
    $$n > 2006$$

52. Untuk nilai *n* yang mana bentuk trinomial $x^2 + 4x + 8\,{}^{2006}\log n$ adalah kuadrat sempurna?

    Solusi:
    $$x^2 + 4x + 4\,{}^{2006}\log n = (x+2)^2$$
    $$x^2 + 4x + 8\,{}^{2006}\log n = x^2 + 4x + 4$$
    $$8\,{}^{2006}\log n = 4$$
    $${}^{2006}\log n = \frac{1}{2}$$
    $$n = \sqrt{2006}$$

53. Diberikan x, y, dan z adalah bilangan real positif yang berbentuk barisan geometri. Sedangkan $x-y$ adalah bilangan bulat kuadrat dan ${}^{\sqrt{6}}\log x+{}^{\sqrt{6}}\log y+{}^{\sqrt{6}}\log z=12$. Tentukan nilai $1900+x+y+z$.

Solusi:

Karena x, y, z adalah barisan geometri, maka $xz=y^2$ .... (1)

${}^{\sqrt{6}}\log x+{}^{\sqrt{6}}\log y+{}^{\sqrt{6}}\log z=12$

${}^{\sqrt{6}}\log abc=12$

$xyz=6^6$ .... (2)

Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh

$y^3=6^6$

$y=36$

Diketahui bahwa $x-y$ adalah bilangan bulat kuadrat, sehingga

$x\in\{11,20,27,32,35\}$

Karena $x\,|\,y^2$, kita memperoleh $x=27$, yang akibatnya $z=48$.

Jadi, $1900+x+y+z=1900+27+36+48=2011$.

54. Jika ${}^{5k}\log 30375={}^{k}\log\left(1215\sqrt{5}\right)$ dan bilangan $N=k^3$, jumlah angka-angka bilangan N adalah ....

Solusi:

Faktorisasi dari $1215=5\cdot 3^5$ dan $30375=5^3\cdot 3^5$.

Misalnya $a={}^{5k}\log 30375={}^{k}\log\left(1215\sqrt{5}\right)$, sehingga

$5^a\cdot k^a=5^3\cdot 3^5$ …. (1) dan

$k^a=5\cdot 3^5\cdot 3^{\frac{1}{2}}\Leftrightarrow k^a=5^{\frac{3}{2}}\cdot 3^5$ …. (2)

Substitusi (2) ke (1), kita mendapatkan

$5^a\cdot 5^{\frac{3}{2}}\cdot 3^5=5^3\cdot 3^5$

$5^a=5^{\frac{3}{2}}$

$a=\dfrac{3}{2}$

Terakhir, gunakan (2), kita mendapatkan

$k^{\frac{3}{2}}=5^{\frac{3}{2}}\cdot 3^5$

$k^3=5^3\cdot 3^{10}=7.381.125$

$N=k^3=7.381.125$

Jadi, jumlah angka-angka bilangan N adalah $7+3+8+1+1+2+5=27$.

55. Tentukan nilai dari $323x+211y$, dengan *x*, *y* adalah bilangan-bilangan real yang memenuhi persamaan $3+{}^{2}\log y-{}^{2}\log\left(64+y^2\right)={}^{2}\log\left(1+x^2\right)-{}^{2}\log x$.

Solusi 1:

$$3+{}^{2}\log y-{}^{2}\log\left(64+y^2\right)={}^{2}\log\left(1+x^2\right)-{}^{2}\log x$$

$${}^{2}\log\left(1+x^2\right)\left(64+y^2\right)={}^{2}\log 8+{}^{2}\log a+{}^{2}\log b$$

$${}^{2}\log\left(1+x^2\right)\left(100+y^2\right)={}^{2}\log 32xy$$

$$\left(1+x^2\right)\left(64+y^2\right)=32xy$$

Gunakan ketaksamaan $AM \geq GM$ yang mengakibatkan

$$\left(1+x^2\right)\left(64+y^2\right)\geq 2\sqrt{x^2}\cdot 2\sqrt{64b^2}=32xy$$

Dengan kesamaan jika dan hanya jika $x=1$, $y=8$.

Jadi, nilai dari $323x+211y=323\cdot 1+211\cdot 8=2011$.

Solusi 2:

$$3+{}^{2}\log y-{}^{2}\log\left(64+y^2\right)={}^{2}\log\left(1+x^2\right)-{}^{2}\log x$$

$${}^{2}\log\left(1+x^2\right)\left(64+y^2\right)={}^{2}\log 8+{}^{2}\log a+{}^{2}\log b$$

$${}^{2}\log\left(1+x^2\right)\left(100+y^2\right)={}^{2}\log 32xy$$

$$\left(1+x^2\right)\left(64+y^2\right)=32xy$$

$$\left(64+y^2\right)x^2-32xy+64+y^2=0$$

$$x=\frac{32y\pm\sqrt{(32y)^2-4\left(64+y^2\right)^2}}{2\left(64+y^2\right)}$$

Untuk bilangan real *x*, determinannya harus tidak negatif, sehingga

$$\begin{aligned}(32y)^2-4\left(64+y^2\right)^2&=\left[32y+2\left(64+y^2\right)\right]\left[32y-2\left(64+y^2\right)\right]\\&=\left(2y^2+32y+128\right)\left(-2y^2+32y-128\right)\\&=-4\left(y^2+16y+64\right)\left(y^2-16y+64\right)\\&=-4\left(y+8\right)^2\left(y-8\right)^2\geq 0\end{aligned}$$

Kita memperoleh bahwa $y=8$ dan $x=1$.

Jadi, nilai dari $323x+211y=323\cdot 1+211\cdot 8=2011$.

56. Sederhanakanlah ${}^{20}\log\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{799\cdot 800}\right)$

Solusi:

Gunakan identitas: $\frac{1}{n\left(n+1\right)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$.

$$^{20}\log\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{799\cdot 800}\right)$$

$$={}^{20}\log\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{799}-\frac{1}{800}\right)$$

$$={}^{20}\log\frac{799}{800}={}^{20}\log 799-{}^{20}\log 800={}^{20}\log 799-3$$

57. Tentukan penyelesaian dari persamaan $\sqrt{\log\left(91+3^{\sqrt{\frac{x}{2}}}\right)}=\log 10^{\sqrt{2}}$.

Solusi:

$$\sqrt{\log\left(91+3^{\sqrt{\frac{x}{2}}}\right)}=\log 10^{\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{\log\left(91+3^{\sqrt{\frac{x}{2}}}\right)}=\sqrt{2}\log 10$$

$$\log\left(91+3^{\sqrt{\frac{x}{2}}}\right)=2$$

$$91+3^{\sqrt{\frac{x}{2}}}=100$$

$$3^{\sqrt{\frac{x}{2}}}=9$$

$$\sqrt{\frac{x}{2}}=2$$

$$\frac{x}{2}=4$$

$$x=8$$

58. Jika 36 adalah salah satu akar persamaan $2\left({}^{6}\log x\right)^{2}+6^{{}^{6}\log a-{}^{6}\log 5}={}^{6}\log x^{7}+36^{4\,{}^{6}\log\sqrt{6}-{}^{6}\log 9}$. Tentukan nilai a dan akar yang lainnya.

Solusi:

$$2\left({}^{6}\log x\right)^{2}+6^{{}^{6}\log a-{}^{6}\log 5}={}^{6}\log x^{7}+36^{4\,{}^{6}\log\sqrt{6}-{}^{6}\log 9}$$

$$2\left({}^{6}\log 36\right)^{2}+6^{{}^{6}\log a-{}^{6}\log 5}={}^{6}\log 36^{7}+36^{{}^{6}\log\left(\sqrt{6}\right)^{4}-{}^{6}\log 9}$$

$$2\left(2\right)^{2}+6^{{}^{6}\log\frac{a}{5}}={}^{6}\log 6^{14}+\left(6^{{}^{6}\log 36-{}^{6}\log 9}\right)^{2}$$

$$8+\frac{a}{5}=14+\left(6^{{}^{6}\log 4}\right)^{2}$$

$$\frac{a}{5}=6+\left(4\right)^{2}$$

$$\frac{a}{5}=6+16$$

$$a=110$$

$$2\left({}^{6}\log x\right)^{2}+6^{{}^{6}\log 110-{}^{6}\log 5}={}^{6}\log x^{7}+36^{4\,{}^{6}\log\sqrt{6}-{}^{6}\log 9}$$

$$2\left({}^{6}\log x\right)^{2}+6^{{}^{6}\log 22}={}^{6}\log x^{7}+36^{{}^{6}\log\frac{\left(\sqrt{6}\right)^{4}}{9}}$$

$$2\left({}^{6}\log x\right)^{2}+22=7\,{}^{6}\log x+\left(6^{{}^{6}\log 4}\right)^{2}$$

$$2\left({}^{6}\log x\right)^{2}+22=7\,{}^{6}\log x+\left(4\right)^{2}$$

$$2\left({}^{6}\log x\right)^{2}-7\,{}^{6}\log x+6=0$$

$$\left(2\,{}^{6}\log x-3\right)\left({}^{6}\log x-2\right)=0$$

$${}^{6}\log x=\frac{3}{2}\text{ atau }{}^{6}\log x=2$$

$$x=6^{\frac{3}{2}}\text{ atau }x=6^{2}$$

$$x=6\sqrt{6}\text{ atau }x=36$$

Jadi, akar yang lainnya adalah $6\sqrt{6}$

59. Tentukan nilai *x* dari persamaan $\frac{1}{1000}x^{-6+2\log x}=1000x^{-2\log 10}$

Solusi:

$$\frac{1}{1000}x^{-6+2\log x}=1000x^{-2\log 10}$$

$$x^{-6+2\log x}=10^6x^{-2}$$

$$\frac{x^{-6+2\log x}}{x^{-2}}=10^6$$

$$x^{-4+2\log x}=10^6$$

$$x^{-2+\log x}=10^3$$

$$\log x^{-2+\log x}=\log 10^3$$

$$\left(-2+\log x\right)\log x=3$$

$$-2\log x+\log^2 x=3$$

$$\log^2 x-2\log x-3=0$$

$$\left(\log x+1\right)\left(\log x-3\right)=0$$

$$\log x=-1\,\text{atau}\log x=3$$

$$x=\frac{1}{10}\,\text{atau}\,x=1000$$

60. Tentukan nilai *x* dari persamaan ${}^{\frac{1}{2x-1}}\log\frac{1}{625}+{}^{\frac{1}{5}}\log\frac{2x-1}{5}=1$.

Solusi:

$${}^{\frac{1}{2x-1}}\log\frac{1}{625}+{}^{\frac{1}{5}}\log\frac{2x-1}{5}=1$$

$${}^{2x-1}\log 625+{}^{\frac{1}{5}}\log\left(2x-1\right)-{}^{\frac{1}{5}}\log 5=1$$

$${}^{2x-1}\log 625-{}^{5}\log\left(2x-1\right)+1=1$$

$$4\;{}^{2x-1}\log 5-\frac{1}{{}^{2x-1}\log 5}=0$$

Misalnya $y={}^{2x-1}\log 5$, sehingga

$$4y-\frac{1}{y}=0$$

$$4y^2-1=0$$

$$y^2=\frac{1}{4}$$

$$y = \pm \frac{1}{2}$$

$$^{2x-1}\log 5 = \pm \frac{1}{2}$$

$$\left(2x-1\right)^{\pm \frac{1}{2}} = 5$$

$$\left(2x-1\right)^{\pm 1} = 25$$

$$2x-1 = 25 \,\text{atau}\, \left(2x-1\right)^{-1} = 25$$

$$2x = 26 \,\text{atau}\, 2x-1 = \frac{1}{25}$$

$$x = 13 \,\text{atau}\, x = \frac{13}{25}$$