Solusi Pengayaan Matematika
Edisi 5

Nomor Soal: 41-50

41. Jika $\{(a,b,c)\}$ adalah himpunan penyelesaian dari sistem persamaan $\begin{cases} a^2+2bc=a \\ b^2+2ca=b \\ c^2+2ab=c \end{cases}$, maka nilai $2009(a+b+c)$ adalah ….

A. 4018 B. 2009 C. 1004,5 D. 1 E. 0

Solusi: [B]

$a^2+2bc=a \Leftrightarrow a^3+2abc=a^2$ …. (1)

$b^2+2ca=b \Leftrightarrow b^3+2abc=b^2$ …. (2)

$c^2+2ab=c \Leftrightarrow c^3+2abc=c^2$ …. (3)

Dari (1) – (2) diperololeh: $a^3-b^3=a^2-b^2$

$$(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)-(a-b)(a+b)=0$$
$$(a-b)\left(a^2+ab+b^2-a-b\right)=0$$
$$a-b=0 \text{ atau } a^2+ab+b^2-a-b=0$$
$$a=b \text{ atau } a^2+ab+b^2-a-b=0$$

Dari (1) – (3) diperololeh: $a^3-c^3=a^2-c^2$

$$(a-c)\left(a^2+ac+c^2\right)-(a-c)(a+c)=0$$
$$(a-c)\left(a^2+ac+c^2-a-c\right)=0$$
$$a-c=0 \text{ atau } a^2+ac+c^2-a-c=0$$
$$a=c \text{ atau } a^2+ac+c^2-a-c=0$$

Dari uraian di atas, kita memperoleh $a=b=c$.

$a^2+2bc=a$

$a^2+2a^2=a$

$3a^2-a=0$

$a(3a-1)=0$

$a=0$ atau $3a-1=0$

$a=0$ (ditolak) atau $a=\frac{1}{3}$ (diterima)

$$a=b=c=\frac{1}{3}$$

Karena himpunan penyelesaiannya adalah $\left\{\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)\right\}$, maka $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Jadi, $2009(a+b+c)=2009\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)=2009$.

42. Dari sistem persamaan $\begin{cases} a+b+c=4 \\ a^2+b^2+c^2=12 \\ a^3+b^3+c^3=67 \end{cases}$ tentukan nilai dari $a^4+b^4+c^4=....$

A. 136 B. 140 C. 148 D. 280 E. 360

Solusi: [D]

$$a^2+b^2+c^2=12$$

$$(a+b+c)^2-2(ab+ac+bc)=12$$

$$(4)^2-2(ab+ac+bc)=12$$

$$ab+ac+bc=2$$

$$a^3+b^3+c^3=67$$

$$(a+b+c)^3-3(a+b+c)(ab+ac+bc)+3abc=67$$

$$(4)^3-3(4)(2)+3abc=67$$

$$abc=9$$

$$\begin{aligned} a^4+b^4+c^4 &= \left(a^2+b^2+c^2\right)^2-2\left(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2\right) \\ &= \left(a^2+b^2+c^2\right)^2-2\left\{(ab+ac+bc)^2-2abc(a+b+c)\right\} \\ &= 12^2-2\left(2^2-2\cdot 9\cdot 4\right)=144+136=280 \end{aligned}$$

43. Jika a dan b bilangan real yang memenuhi sistem persamaan $\begin{cases} ab+a+b=71 \\ a^2b+ab^2=880 \end{cases}$

Carilah nilai dari a^2+b^2.

A. 120 B. 136 C. 140 D. 146 E. 993

Solusi:[D]

Misalnya $x=ab$ dan $y=a+b$, sehingga

$$ab+a+b=71\to x+y=71\to y=71-x$$

$$a^2b+ab^2=880\to ab(a+b)=880\to xy=880$$

$$y=71-x\to xy=880$$

$$x(71-x)=880$$

$$x^2-71x+880=0$$

$$(x-16)(x-55)=0$$

$$x = 16 \text{ atau } x = 55$$

$$x = 16 \rightarrow y = 71 - x = 71 - 16 = 55$$

$$x = 55 \rightarrow y = 71 - x = 71 - 55 = 16$$

$$\begin{cases} ab = 16 \\ a + b = 55 \end{cases} \text{ atau } \begin{cases} ab = 55 \\ a + b = 16 \end{cases}$$

$$a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = (55)^2 - 2(16) = 2993 \text{ atau}$$

$$a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = (16)^2 - 2(55) = 146$$

44. Diberikan x, y, dan z adalah bilangan-bilangan positif yang memenuhi sistem persamaan $\begin{cases} x + y = 13 \\ y^2 + z^2 - yz = 25 \\ x^2 + z^2 + xz = 144 \end{cases}$

Tentukanlah nilai z.

A. 40 B. $13\sqrt{3}$ C. $\frac{40}{13}$ D. $\frac{40}{13}\sqrt{3}$ E. $\frac{13}{40}\sqrt{3}$

Solusi: [D]

$$x + y = 13 \rightarrow x = 13 - y$$

$$y^2 + z^2 - yz = 25 \rightarrow \left(y - \frac{z}{2}\right)^2 + \frac{3z^2}{4} = 25 \ldots. (1)$$

$$x = 13 - y \rightarrow x^2 + z^2 + xz = 144$$

$$(13 - y)^2 + z^2 + (13 - y)z = 144$$

$$\left[13 - \left(y - \frac{z}{2}\right)\right]^2 + \frac{3z^2}{4} = 144 \ldots. (2)$$

Dengan mengurangkan persamaan (1) dari (2), maka kita memperoleh:

$$\left[13 - \left(y - \frac{z}{2}\right)\right]^2 - \left(y - \frac{z}{2}\right)^2 = 119$$

$$\left[13 - \left(y - \frac{z}{2}\right) + \left(y - \frac{z}{2}\right)\right]\left[13 - \left(y - \frac{z}{2}\right) - \left(y - \frac{z}{2}\right)\right] = 119$$

$$13\left[13 - 2\left(y - \frac{z}{2}\right)\right] = 119$$

$$13 - 2\left(y - \frac{z}{2}\right) = \frac{119}{13}$$

$$y - \frac{z}{2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{119}{13} - 13\right)$$

$$y-\frac{z}{2}=\frac{25}{13}$$

$$y-\frac{z}{2}=\frac{25}{13}\rightarrow\left(y-\frac{z}{2}\right)^2+\frac{3z^2}{4}=25$$

$$\left(\frac{25}{13}\right)^2+\frac{3z^2}{4}=25$$

$$\frac{3z^2}{4}=25-\frac{625}{169}$$

$$z^2=\frac{4}{3}\left(\frac{3600}{169}\right)$$

$$z=\frac{40}{13}\sqrt{3}$$

45. Diberikan $x+y+\frac{x}{y}=19$ dan $\frac{x^2+xy}{y}=60$. Carilah nilai x^3+y^3.

A. 95112 B. 91152 C. 91125 D. 51912 E. 59112

Solusi:[A]

Misalnya $x+y=a$ dan $\frac{x}{y}=b$, sehingga

$$x+y+\frac{x}{y}=19\Leftrightarrow a+b=19\rightarrow b=19-a$$

$$\frac{x^2+xy}{y}=60\Leftrightarrow \frac{x(x+y)}{y}=60\Leftrightarrow ab=60$$

$$b=19-a\rightarrow ab=60$$

$$a(19-a)=60$$

$$a^2-19a+60=0$$

$$(a-4)(a-15)=0$$

$$a=4 \text{ atau } a=15$$

$$a=4\rightarrow b=19-a=19-4=15$$

$$a=15\rightarrow b=19-a=19-15=4$$

$$\begin{cases}x+y=4\\ \frac{x}{y}=15\end{cases} \text{ dan } \begin{cases}x+y=15\\ \frac{x}{y}=4\end{cases}$$

$$\frac{x}{y}=15\Leftrightarrow x=15y$$

$$x=15y\rightarrow x+y=4$$

$$15y+y=4$$

$$y=\frac{1}{4}$$

$$y=\frac{1}{4}\to\ x=15y\ =\frac{15}{4}$$

$$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)\ =\left(\frac{1}{4}+\frac{15}{4}\right)^3-3\times\frac{1}{4}\times\frac{15}{4}\left(\frac{1}{4}+\frac{15}{4}\right)=-52\frac{3}{4}$$

$$\frac{x}{y}=4\Leftrightarrow\ x=4y$$

$$x=4y\to\ x+y=15$$

$$4y+y=15$$

$$y=3$$

$$y=3\to\ x=15y\ =45$$

$$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)\ =(45+3)^3-3\times45\times3(45+3)=91152$$

46. Jika x dan y adalah bilangan real yang memenuhi sistem persamaan

$$\begin{cases}x^2y^2(x+y)^2=61x^2y^2-1\\ x+y+\dfrac{1}{xy}=1\end{cases}$$

Hitunglah nilai dari $\dfrac{x+y}{xy}$.

A. 60 B. 36 C. 30 D. – 30 E. – 30

Solusi:[D]

Misalnya $x+y=u$ dan $\dfrac{1}{xy}=v$, sehingga diperoleh

$$x^2y^2(x+y)^2=61x^2y^2-1$$

$$(x+y)^2=61-\left(\frac{1}{xy}\right)^2$$

$$u^2=61-v^2$$

$$u^2+v^2=61\ldots.\ (1)$$

$$x+y+\frac{1}{xy}=1$$

$$u+v=1$$

$$v=1-u\ \ldots.\ (2)$$

Dari persamaan (1) dan (2), kita memperoleh:

$$(1-u)^2+u^2=61$$

$$1-2u+u^2+u^2=61$$

$2u^2 - 2u - 60 = 0$

$u^2 - u - 30 = 0$

$(u+5)(u-6) = 0$

$u = -5$ atau $u = 6$

$u = -5 \to v = 1 - u = 1 - (-5) = 6$

$u = 6 \to v = 1 - u = 1 - 6 = -5$

$$\begin{cases} x + y = -5 \\ \dfrac{1}{xy} = 6 \end{cases} \text{ atau } \begin{cases} x + y = 6 \\ \dfrac{1}{xy} = -5 \end{cases}$$

$$\frac{x+y}{xy} = (x+y) \times \frac{1}{xy} = -5 \times 6 = -30 \text{ atau } \frac{x+y}{xy} = (x+y) \times \frac{1}{xy} = 6 \times (-5) = -30$$

47. Himpunan penyelesaian dari sitem persamaan $\begin{cases} x + y + xy = 11 \\ y + z + yz = 14 \\ z + x + zx = 19 \end{cases}$ adalah $\{(a, b, c)\}$. Tentukan nilai $a + b + c = ...$

A. 2   B. 3   C. 4   D. 6   E. 10

Solusi: [E]

$x + y + xy = 11$

$x + y + xy + 1 = 11 + 1$

$(x+1)(y+1) = 12$ …. (1)

$y + z + yz = 14$

$y + z + yz + 1 = 14 + 1$

$(y+1)(z+1) = 15$ …. (2)

$z + x + zx = 19$

$z + x + zx + 1 = 19 + 1$

$(z+1)(x+1) = 20$ …. (3)

Perkalian ketiga persamaan tersebut menghasilkan:

$[(x+1)(y+1)(z+1)]^2 = 12 \times 15 \times 20$

$(x+1)(y+1)(z+1) = \sqrt{3600}$

$(x+1)(y+1)(z+1) = 60$ …. (4)

Dari persamaan (2) dan (4) diperoleh

$(x+1) \cdot 15 = 60$

$x + 1 = 4$

$x = 3$

Dari persamaan (3) dan (4) diperoleh

$(y+1)\cdot 20=60$

$y+1=3$

$y=2$

Dari persamaan (1) dan (4) diperoleh

$(z+1)\cdot 12=60$

$z+1=5$

$z=4$

Sehingga $a=3, b=2, c=4$.

Jadi, $a+b+c=3+2+4=10$

48. Jika pasangan (x,y,z) dengan x, y, dan z adalah bilangan real bulat positif adalah solusi dari sistem persamaan $\begin{cases} x+xy+xyz=564 \\ y+xz+xyz=354 \end{cases}$, maka nilai $x+y+z=....$

A. 1 B. 5 C. 70 D. 71 E. 75

Solusi: [E]

$x+xy+xyz=564$

$x+xz+xy+xyz-xz=564$

$x(1+z+y+yz)-xz=564$

$x(1+y)(1+z)-xz=564 \ldots.$ (1)

$y+xz+xyz=354$

$xyz+xz+y+1-1=354$

$(xz+1)(y+1)-1=354$

$(xz+1)(y+1)=355 \ldots.$ (2)

Dari persamaan (2) diperoleh

$(xz+1)(y+1)=5\times 71$

Sehingga

$y+1=5 \Leftrightarrow y=4$ atau $xz+1=71 \Leftrightarrow xz=70$

$y+1=71 \Leftrightarrow y=70$ atau $xz+1=5 \Leftrightarrow xz=4$

Jika $y=4$ dan $xz=70$, maka

$x(4+1)(1+z)-70=564$

$5x(1+z)=634$, tidak ada solusi untuk x dan z yang merupakan bilagan bulat positif.

Jika $y=70$ dan $xz=4$, maka

$x(70+1)(1+z)-4=564$

$71x(1+z)=568$

$x(1+z)=8$

Sehingga $x=4$ dan $z=1$

Sehingga pasangan (x,y,z) adalah $(4,70,1)$.

Jadi, $x+y+z=4+70+1=75$.

49. Diberikan x, y, dan z adalah bilangan real yang memenuhi sistem persamaan $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x^2+y^2+z^2=2 \\ x^3+y^3+z^3=3 \end{cases}$. Hitunglah nilai $x^4+y^4+z^4$.

A. 4 B. $4\frac{1}{6}$ C. 6 D. $6\frac{1}{6}$ E. $6\frac{1}{4}$

Solusi: [B]

$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz$

$(1)^2=2+2xy+2xz+2yz$

$xy+xz+yz=-\frac{1}{2}$

$(x+y+z)^3=x^3+y^3+z^3+3(xy+xz+yz)(x+y+z)-3xyz$

$(1)^3=3+3\left(-\frac{1}{2}\right)(1)-3xyz$

$1=3-\frac{3}{2}-3xyz$

$3xyz=\frac{1}{2}$

$xyz=\frac{1}{6}$

$\left(x^2+y^2+z^2\right)^2=x^4+y^4+z^4+2\left(x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2\right)$

$\left(x^2+y^2+z^2\right)^2=x^4+y^4+z^4+2\left[(xy+xz+yz)^2-2x^2yz-2xyz^2-2xyz^2\right]$

$\left(x^2+y^2+z^2\right)^2=x^4+y^4+z^4+2\left[(xy+xz+yz)^2-2xyz(x+y+z)\right]$

$(2)^2=x^4+y^4+z^4+2\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^2-2\cdot\frac{1}{6}(1)\right]$

$4=x^4+y^4+z^4+2\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)$

$4=x^4+y^4+z^4-\frac{1}{6}$

$x^4+y^4+z^4=4\frac{1}{6}$

50. Jika penyelesaian dari sistem persamaan $\begin{cases} xyz+xy+yz+zx+x+y+z=1 \\ yzw+yz+zw+wy+y+z+w=9 \\ zwx+zw+wx+xz+z+w+x=9 \\ wxy+wx+xy+yw+w+x+y=9 \end{cases}$

adalah (w,x,y,z), tentukan nilai $w+x+y+z$.

A. $\sqrt[3]{2}-4$ B. $8\sqrt[3]{2}$ C. $8\sqrt[3]{2}+4$ D. $\sqrt[3]{2}+4$ E. $8\sqrt[3]{2}-4$

Solusi: [E]

$xyz+xy+yz+zx+x+y+z+1=1+1$

$xy(z+1)+x(z+1)+y(z+1)+(z+1)=2$

$(xy+x+y+1)(z+1)=2$

$[x(y+1)+(y+1)](z+1)=2$

$(x+1)(y+1)(z+1)=2$ …. (1)

$yzw+yz+zw+wy+y+z+w=9$

$yzw+yz+zw+wy+y+z+w+1=9+1$

$yz(w+1)+y(w+1)+z(w+1)+(w+1)=10$

$(yz+y+z+1)(w+1)=10$

$[y(z+1)+(z+1)](w+1)=10$

$(y+1)(z+1)(w+1)=10$ …. (2)

$zwx+zw+wx+xz+z+w+x=9$

$zwx+zw+wx+xz+z+w+x+1=9+1$

$zw(x+1)+z(x+1)+w(x+1)+(x+1)=10$

$(zw+z+w+1)(x+1)=10$

$[z(w+1)+(w+1)](x+1)=10$

$(x+1)(z+1)(w+1)=10$ …. (3)

$wxy+wx+xy+yw+w+x+y=9$

$wxy+wx+xy+yw+w+x+y+1=9+1$

$wx(y+1)+w(y+1)+x(y+1)+(y+1)=10$

$(wx+w+x+1)(y+1)=10$

$[w(x+1)+(x+1)](y+1)=10$

$(x+1)(y+1)(w+1)=10$ …. (4)

Perkalian dari ke empat persamaan itu menghasilkan:

$(x+1)^3(y+1)^3(z+1)^3(w+1)^3=2000$

$(x+1)(y+1)(z+1)(w+1)=10\sqrt[3]{2}$ …. (5)

Dari persamaan (1) dan (5) kita memperoleh:

$2(w+1)=10\sqrt[3]{2}$

$w+1=5\sqrt[3]{2}$

$w=5\sqrt[3]{2}-1$

Dari persamaan (2) dan (5) kita memperoleh:

$(x+1)10=10\sqrt[3]{2}$

$x+1=\sqrt[3]{2}$

$x=\sqrt[3]{2}-1$

Dari persamaan (3) dan (5) kita memperoleh:

$(y+1)10=10\sqrt[3]{2}$

$y+1=\sqrt[3]{2}$

$y=\sqrt[3]{2}-1$

Dari persamaan (4) dan (5) kita memperoleh:

$(z+1)10=10\sqrt[3]{2}$

$z+1=\sqrt[3]{2}$

$z=\sqrt[3]{2}-1$

Sehingga, nilai-nilai $x=y=z=\sqrt[3]{2}-1$ dan $w=5\sqrt[3]{2}-1$.

Jadi, $w+x+y+z=5\sqrt[3]{2}-1+3\left(\sqrt[3]{2}-1\right)=8\sqrt[3]{2}-4$