

# Solusi Pengayaan Matematika

## Edisi 5

### Nomor Soal: 41-50

41. Diberikan  $x, y,$  dan  $z$  adalah bilangan real yang memenuhi  $x + \frac{1}{y} = \frac{16}{15}, y + \frac{1}{z} = \frac{25}{6}, z + \frac{1}{x} = \frac{21}{10}$ .

Jika bilangan  $N = 2007xyz$ , maka jumlah angka-angka bilangan  $N$  adalah ....

- A. 3            B. 4            C. 5            D. 6            E. 9

**Solusi 1: [E]**

$$x + \frac{1}{y} = \frac{16}{15} \dots (1)$$

$$y + \frac{1}{z} = \frac{25}{6} \dots (2)$$

$$z + \frac{1}{x} = \frac{21}{10} \dots (3)$$

Dari persamaan (1):

$$x + \frac{1}{y} = \frac{16}{15}$$

$$x = \frac{16}{15} - \frac{1}{y} = \frac{16y - 15}{15y}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{15y}{16y - 15} \dots (4)$$

Substitusikan persamaan (4) ke persamaan (3):

$$z + \frac{1}{x} = \frac{21}{10}$$

$$z = \frac{21}{10} - \frac{1}{x}$$

$$z = \frac{21}{10} - \frac{15y}{16y - 15} \dots (5)$$

Dari persamaan (2):

$$y + \frac{1}{z} = \frac{25}{6}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{25}{6} - y$$

$$\frac{1}{z} = \frac{25 - 6y}{6}$$

$$z = \frac{6}{25 - 6y} \dots (6)$$

Perhatikan persamaan (5) sama dengan persamaan (6):

$$\frac{21}{10} - \frac{15y}{16y - 15} = \frac{6}{25 - 6y}$$

$$\frac{7}{10} - \frac{5y}{16y-15} = \frac{2}{25-6y}$$

$$\frac{112y-105-50y}{160y-150} = \frac{2}{25-6y}$$

$$\frac{62y-105}{160y-150} = \frac{2}{25-6y}$$

$$1550y - 372y^2 - 2625 + 630y = 320y - 300$$

$$372y^2 - 1860y + 2325 = 0$$

$$124y^2 - 620y + 775 = 0$$

$$(2y-5)(62y-155) = 0$$

$$y = \frac{5}{2} \vee y = \frac{155}{62}$$

Substitusikan  $y = \frac{5}{2}$  ke dalam persamaan (6) dan (4):

$$z = \frac{6}{25-6y} = \frac{6}{25-6 \cdot \frac{5}{2}} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{15 \cdot \frac{5}{2}}{16 \cdot \frac{5}{2} - 15} = \frac{3}{2}$$

$$x = \frac{2}{3}$$

$$\text{Sehingga } (x, y, z) = \left( \frac{2}{3}, \frac{5}{2}, \frac{3}{5} \right)$$

$$N = 2012xyz = 2007 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{5} = 2007$$

Jadi, jumlah angka-angka bilangan  $N$  adalah  $2 + 0 + 0 + 7 = 9$ .

Substitusikan  $y = \frac{155}{62}$  ke dalam persamaan (6) dan (4):

$$z = \frac{6}{25-6y} = \frac{6}{25-6 \cdot \frac{155}{62}} = \frac{372}{1550-930} = \frac{372}{620} = \frac{93}{155}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{15 \cdot \frac{155}{62}}{16 \cdot \frac{155}{62} - 15} = \frac{15 \cdot 155}{16 \cdot 155 - 15 \cdot 62} = \frac{2325}{1550} = \frac{93}{62}$$

$$x = \frac{62}{93}$$

$$\text{Sehingga } (x, y, z) = \left( \frac{62}{93}, \frac{155}{62}, \frac{93}{155} \right)$$

$$N = 2007xyz = 2007 \cdot \frac{62}{93} \cdot \frac{155}{62} \cdot \frac{93}{155} = 2007$$

Jadi, jumlah angka-angka bilangan  $N$  adalah  $2 + 0 + 0 + 7 = 9$ .

**Solusi 2: [E]**

$$x + \frac{1}{y} = \frac{16}{15} \dots (1)$$

$$y + \frac{1}{z} = \frac{25}{6} \dots (2)$$

$$z + \frac{1}{x} = \frac{21}{10} \dots (3)$$

$$(1) \times (2) \times (3) - (1) - (2) - (3):$$

$$xyz + x + y + z + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{xyz} - \left( x + y + z + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) = \frac{28}{3} - \frac{22}{3}$$

$$xyz + \frac{1}{xyz} = 2$$

$$(xyz)^2 - 2(xyz) + 1 = 0$$

$$(xyz - 1)^2 = 0$$

$$xyz = 1$$

$$N = 2007 \cdot xyz = 2007 \cdot 1 = 2007$$

Jadi, jumlah angka-angka bilangan  $N$  adalah  $2 + 0 + 0 + 7 = 9$ .

42. Diketahui  $x + y + z = 6$  dan  $xy + yz + xz = 11$ . Nilai dari  $x^2 + y^2 + z^2$  adalah ....

A. 12                      B. 13                      C. 14                      D. 15                      E. 16

**Solusi: [C]**

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2(xy + yz + xz) = (6)^2 - 2(11) = 36 - 22 = 14$$

43. Jika  $x + y + z = 12$ ,  $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ , dan  $x^3 + y^3 + z^3 = 48$ , maka tentukan  $xyz$ .

A. -8                      B. -18                      C. 48                      D. 88                      E. 128

**Solusi: [A]**

Kita membuat manipulasi aljabar sebagai berikut.

$$(x + y + z)^2 = 12^2 = 144$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + xz) = 144$$

$$36 + 2(xy + yz + xz) = 144$$

$$2(xy + yz + xz) = 108$$

$$xy + yz + xz = 54$$

$$(x + y + z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3(x^2y + x^2z + y^2x + y^2z + z^2x + z^2y) + 6xyz$$

$$12^3 = 48 + 3(x^2y + x^2z + y^2x + y^2z + z^2x + z^2y) + 6xyz$$

$$1728 = 48 + 3(x^2y + x^2z + y^2x + y^2z + z^2x + z^2y) + 6xyz$$

$$3(x^2y + x^2z + y^2x + y^2z + z^2x + z^2y) + 6xyz = 1680$$

$$x^2y + x^2z + y^2x + y^2z + z^2x + z^2y + 2xyz = 560$$

$$(xy + yz + zx)(x + y + z) - 3xyz + 2xyz = 560$$

$$(xy + yz + zx)(x + y + z) - xyz = 560$$

$$54 \cdot 12 - xyz = 560$$

$$xyz = 88$$

44. Diberikan sistem persamaan  $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ xy + yz + zx = 6 \\ xyz = 3 \end{cases}$ . Nilai dari  $\frac{x^2 + y^2 + z^2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}} = \dots$

A. 4

B. 2

C. 1

D.  $\frac{1}{2}$

E.  $\frac{1}{8}$

**Solusi: [B]**

Bagilah persamaan kedua dengan persamaan ketiga, sehingga diperoleh

$$\frac{xy + yz + zx}{xyz} = \frac{6}{3}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$$

Kuadratkan persamaan pertama, kemudian substitusikan persamaan kedua, maka diperoleh

$$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx)$$

$$4^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2 \cdot 6$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

Jadi,  $\frac{x^2 + y^2 + z^2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}} = \frac{4}{2} = 2$

45. Diketahui sistem persamaan  $\begin{cases} a + b + c = 4 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 12 \\ a^3 + b^3 + c^3 = 67 \end{cases}$ . Tentukan nilai dari  $a^4 + b^4 + c^4 = \dots$

A. 80

B. 108

C. 120

D. 200

E. 280

**Solusi: [E]**

$$a^2 + b^2 + c^2 = 12$$

$$(a + b + c)^2 - 2(ab + ac + bc) = 12$$

$$4^2 - 2(ab + ac + bc) = 12$$

$$ab + ac + bc = 2$$

$$a^3 + b^3 + c^3 = (a + b + c)^3 - 3(a + b + c)(ab + ac + bc) + 3abc = 67$$

$$4^3 - 3 \cdot 4 \cdot 2 + 3abc = 67$$

$$abc = 9$$

$$a^4 + b^4 + c^4 = (a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)$$

$$= (a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2[(ab + ac + bc)^2 - 2abc(a + b + c)]$$

$$= 12^2 - 2(2^2 - 2 \cdot 9 \cdot 4) = 144 + 136 = 280$$

46. Tentukan nilai  $x + y + z$  yang memenuhi sistem persamaan  $\begin{cases} x + y + xy = 11 \\ y + z + yz = 14 \\ z + x + zx = 19 \end{cases}$ .

A. 12                  B. 10                  C. 9                  D. 8                  E. 7

**Solusi: [C]**

$$x + y + xy = 11$$

$$x + y + xy + 1 = 11 + 1$$

$$(x+1)(y+1) = 12 \dots (1)$$

$$y + z + yz = 14$$

$$y + z + yz + 1 = 14 + 1$$

$$(y+1)(z+1) = 15 \dots (2)$$

$$z + x + zx = 19$$

$$z + x + zx + 1 = 19 + 1$$

$$(z+1)(x+1) = 20 \dots (3)$$

Perkalian ketiga persamaan tersebut menghasilkan:

$$[(x+1)(y+1)(z+1)]^2 = 12 \times 15 \times 20$$

$$(x+1)(y+1)(z+1) = \sqrt{3600}$$

$$(x+1)(y+1)(z+1) = 60 \dots (4)$$

Dari persamaan (2) dan (4) diperoleh

$$(x+1) \cdot 15 = 60$$

$$x+1 = 4$$

$$x = 3$$

Dari persamaan (3) dan (4) diperoleh

$$(y+1) \cdot 20 = 60$$

$$y+1 = 3$$

$$y = 2$$

Dari persamaan (1) dan (4) diperoleh

$$(z+1) \cdot 12 = 60$$

$$z+1 = 5$$

$$z = 4$$

Jadi, nilai  $x + y + z = 3 + 2 + 4 = 9$ .

47. Jika pasangan  $(x, y, z)$  adalah solusi dari sistem persamaan  $\begin{cases} x + xy + xyz = 564 \\ y + xz + xyz = 354 \end{cases}$  dengan  $x, y,$  dan

$z$  adalah bilangan real bulat positif, maka nilai  $x + y + z$  adalah ....

A. 1                  B. 4                  C. 70                  D. 75                  E. 280

**Solusi: [D]**

$$x + xy + xyz = 564$$

$$x + xz + xy + xyz - xz = 564$$

$$x(1 + z + y + yz) - xz = 564$$

$$x(1+y)(1+z) - xz = 564 \dots (1)$$

$$y + xz + xyz = 354$$

$$xyz + xz + y + 1 - 1 = 354$$

$$(xz + 1)(y + 1) - 1 = 354$$

$$(xz + 1)(y + 1) = 355 \dots (2)$$

Dari persamaan (2) diperoleh

$$(xz + 1)(y + 1) = 5 \times 71$$

Sehingga

$$y + 1 = 5 \Leftrightarrow y = 4 \text{ atau } xz + 1 = 71 \Leftrightarrow xz = 70$$

$$y + 1 = 71 \Leftrightarrow y = 70 \text{ atau } xz + 1 = 5 \Leftrightarrow xz = 4$$

Jika  $y = 4$  dan  $xz = 70$ , maka

$$x(4 + 1)(1 + z) - 70 = 564$$

$5x(1 + z) = 634$ , tidak ada solusi untuk  $x$  dan  $z$  yang merupakan bilangan bulat positif.

Jika  $y = 70$  dan  $xz = 4$ , maka

$$x(70 + 1)(1 + z) - 4 = 564$$

$$71x(1 + z) = 568$$

$$x(1 + z) = 8$$

Sehingga  $x = 4$  dan  $z = 1$

Sehingga pasangan  $(x, y, z)$  adalah  $(4, 70, 1)$ .

Jadi, nilai  $x + y + z = 4 + 70 + 1 = 75$

48. Diberikan sistem persamaan 
$$\begin{cases} (x-1)(y-2) = 12 \\ (y-2)(z-3) = 20 \\ (z-3)(x-1) = 15 \end{cases}$$
 dengan  $x, y, z > 0$ . Berapa nilai dari

$$3x + 2y + 3z ?$$

A. 96

B. 72

C. 64

D. 60

E. 48

**Solusi: [E]**

$$(x-1)(y-2) \times (y-2)(z-3) \times (z-3)(x-1) = 12 \times 20 \times 15$$

$$[(x-1)(y-2)(z-3)]^2 = 3600$$

$$(x-1)(y-2)(z-3) = \pm 60$$

$$(x-1)(y-2)(z-3) = 60 \text{ (diterima) atau } (x-1)(y-2)(z-3) = -60 \text{ (ditolak, karena } x, y, z > 0)$$

$$(x-1)(y-2) = 12 \rightarrow (x-1)(y-2)(z-3) = 60$$

$$12(z-3) = 60$$

$$z-3 = 5$$

$$z = 8$$

$$(y-2)(z-3) = 20 \rightarrow (x-1)(y-2)(z-3) = 60$$

$$20(x-1) = 60$$

$$x-1 = 3$$

$$x = 4$$

$$(z-3)(x-1) = 15 \rightarrow (x-1)(y-2)(z-3) = 60$$

$$15(y-2) = 60$$

$$y-2 = 4$$

$$y = 6$$

$$\therefore 3x + 2y + 3z = 3 \cdot 4 + 2 \cdot 6 + 3(8) = 12 + 12 + 24 = 48$$

49. Jika  $x$ ,  $y$ , dan  $z$  adalah bilangan real positif, tentukan nilai  $x:y:z$  yang memenuhi sistem persamaan berikut ini.

$$x^2 + xy + xz = 8$$

$$y^2 + yx + yz = 7$$

$$z^2 + zx + zy = 10$$

- A. 8:7:10      B. 16:7:10      C. 8:14:10      D. 8:7:5      E. 16:14:5

**Solusi: [A]**

$$x^2 + xy + xz = 8 \Leftrightarrow x(x + y + z) = 8$$

$$y^2 + yx + yz = 7 \Leftrightarrow y(x + y + z) = 7$$

$$z^2 + zx + zy = 10 \Leftrightarrow z(x + y + z) = 10$$

Jumlahkan ketiga persamaan tersebut, sehingga diperoleh

$$(x + y + z)^2 = 25 \Leftrightarrow x + y + z = \pm 5$$

Substitusikan  $x + y + z = \pm 5$  ke ketiga persamaan, sehingga didapat  $x = \pm \frac{8}{5}, y = \pm \frac{7}{5}, z = \pm 2$

Karena  $x$ ,  $y$ , dan  $z$  adalah bilangan real positif, maka  $x = \frac{8}{5}, y = \frac{7}{5}, z = 2$ .

Jadi,  $x:y:z = \frac{8}{5}:\frac{7}{5}:2 = 8:7:10$

50. Tentukan nilai  $\frac{yz}{x}$  yang memenuhi sistem persamaan  $\begin{cases} x\sqrt{yz} = 4 \\ y\sqrt{xz} = 9 \\ z\sqrt{xy} = 16 \end{cases}$ .

- A. 108      B. 84      C. 72      D. 64      E. 54

**Solusi: [E]**

$$x\sqrt{yz} \times y\sqrt{xz} \times z\sqrt{xy} = 4 \times 9 \times 16$$

$$xyz\sqrt{(xyz)^2} = 4 \times 9 \times 16$$

$$xyz \times xyz = 4 \times 9 \times 16$$

$$(xyz)^2 = 2^2 \times 3^2 \times 4^2$$

$$xyz = 2 \times 3 \times 4$$

$$xyz = 24$$

$$xyz = 24 \rightarrow x\sqrt{yz} = 4$$

$$x\sqrt{\frac{24}{x}} = 4$$

$$x^2 \times \frac{24}{x} = 4^2$$

$$24x = 16$$

$$x = \frac{2}{3}$$

$$xyz = 24 \rightarrow y\sqrt{xz} = 9$$

$$y\sqrt{\frac{24}{y}} = 9$$

$$y^2 \times \frac{24}{y} = 9^2$$

$$24y = 81$$

$$y = \frac{27}{8}$$

$$xyz = 24 \rightarrow z\sqrt{xy} = 16$$

$$z\sqrt{\frac{24}{z}} = 16$$

$$z^2 \times \frac{24}{z} = 16^2$$

$$24z = 256$$

$$z = \frac{32}{3}$$

$$\text{Jadi, nilai } \frac{yz}{x} = \frac{\frac{27}{8} \times \frac{32}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2} \times 36 = 54 .$$