Solusi Pengayaan Matematika
Edisi 5

Nomor Soal: 41-50

41. Bilangan x memenuhi $3^{2x} - \frac{34}{15^{1-x}} + 5^{2x} = 0$. Hitunglah $337 \cdot 3^{2x} + 200 \cdot 5^{2x}$ yang mungkin.

Solusi:

Misalnya $3^x = a$ dan $5^x = b$, sehingga

$$3^{2x} - \frac{34}{15^{1-x}} + 5^{2x} = 0$$

$$3^{2x} - \frac{34}{15} \cdot 15^x + 5^{2x} = 0$$

$$15 \cdot 3^{2x} - 34 \cdot 3^x \cdot 5^x + 15 \cdot 5^{2x} = 0$$

$$15a^2 - 34ab + 15b^2 = 0$$

$$(5a - 3b)(3a - 5b) = 0$$

$5a = 3b$ atau $3a = 5b$

$5 \cdot 3^x = 3 \cdot 5^x$ atau $3 \cdot 3^x = 5 \cdot 5^x$

$\left(\frac{3}{5}\right)^x = \frac{3}{5}$ atau $\left(\frac{3}{5}\right)^x = \left(\frac{3}{5}\right)^{-1}$

$x = 1$ atau $x = -1$

Jika $x = 1$, maka $337 \cdot 3^{2\cdot 1} + 200 \cdot 5^{2\cdot 1} = 1011 + 1000 = 2011$.

Jika $x = -1$, maka $337 \cdot 3^{2(-1)} + 200 \cdot 5^{2(-1)} = \frac{337}{9} + \frac{200}{25} = \frac{697}{9}$.

42. n bilangan rasional yang memenuhi persamaan $\left(4\sqrt{3} + 4\sqrt{2}\right)^{6-n} = \left(\frac{16}{5 - 2\sqrt{6}}\right)^n$. Nilai dari $2006n$ adalah ....

Solusi:

$$\left(4\sqrt{3} + 4\sqrt{2}\right)^{6-n} = \left(\frac{16}{5 - 2\sqrt{6}}\right)^n$$

$$\left(4\sqrt{3} + 4\sqrt{2}\right)^{6-n} = \left(\frac{16}{5 - 2\sqrt{6}} \times \frac{5 + 2\sqrt{6}}{5 + 2\sqrt{6}}\right)^n$$

$$\left(4\sqrt{3} + 4\sqrt{2}\right)^{6-n} = \left(80 + 32\sqrt{6}\right)^n$$

$$\left(4\sqrt{3} + 4\sqrt{2}\right)^{6-n} = \left(4\sqrt{3} + 4\sqrt{2}\right)^{2n}$$

$6-n=2n$

$n=2$

Jadi, nilai $2006n=2006\cdot 2=4012$

Catatan:

$\left(4\sqrt{3}+4\sqrt{2}\right)^4=\left(4\sqrt{3}+4\sqrt{2}\right)^2\left(4\sqrt{3}+4\sqrt{2}\right)^2=\left(80+32\sqrt{6}\right)\left(80+32\sqrt{6}\right)$

$=\left(80+32\sqrt{6}\right)^2$

43. Tentukan pasangan tripel (a,b,c) dari bilangan real yang memenuhi sistem persamaan $c^a=b^{2a}$, $3^c=\frac{1}{9}\cdot 9^a$, dan $a+b+c=9$.

Solusi:

$a+b+c=9$ .... (1)

$c^a=b^{2a}\Leftrightarrow c=b^2$ .... (2)

$3^c=\frac{1}{9}\cdot 9^a\Leftrightarrow 3^c=3^{2a-2}\Leftrightarrow c=2a-2$ .... (3)

Dari persamaan (2) dan (3) diperoleh $b^2=2a-2$ .... (4)

Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh $a+b+b^2=12$ .... (5)

Dari persamaan (4) dan (5) diperoleh

$b^2=2\left(9-b^2-b\right)-2$

$b^2=18-2b^2-2b-2$

$3b^2+2b-16=0$

$(b-2)(3b+8)=0$

$b=2$ atau $y=-\frac{8}{3}$

Jika $b=2$, maka $c=b^2=2^2=4$ dan

$c=2a-2$

$4=2a-2$

$a=3$

Pasangan tripel $(a,b,c)=(3,2,4)$.

Jika $b=-\frac{8}{3}$, maka $c=b^2=\left(-\frac{8}{3}\right)^2=\frac{64}{9}$

$c=2a-2$

$\frac{64}{9}=2a-2$

$64=18a-18$

$18a=82$

$$a = \frac{41}{9}$$

Pasangan tripel yang lain adalah $(a,b,c) = \left(\frac{41}{9}, -\frac{8}{3}, \frac{64}{9}\right)$.

44. Tentukan pasangan tidak nol (a,b) yang merupakan solusi simultan dari $a^{a+b} = b^8$ dan $b^{a+b} = a^{12}b^4$.

Solusi:

Jika salah satu $a = 0$ atau $b = 0$, maka yang lain sama dengan nol juga, tetapi 0° tidak didefinisikan.

Sekarang kalikan $a^{a+b} = b^8$ dan $b^{a+b} = a^{12}b^4$ menghasilkan $(ab)^{a+b} = (ab)^{12}$, sehingga diperoleh $a + b = 12$.

Substitusikan kembali ke $a^{a+b} = b^8$ diperoleh $a^{12} = b^8$ atau $b = a^{\frac{3}{2}}$.

Kemudian substitusikan $b = a^{\frac{3}{2}}$ ke $a + b = 12$, sehingga diperoleh

$$a + a^{\frac{3}{2}} = 12$$

$$a^{\frac{3}{2}} = 12 - a$$

$$a^3 = 144 - 24a + a^2$$

$$a^3 - a^2 + 24a - 144 = 0$$

$$(a-4)(a^2 + 3a + 36) = 0$$

4	1	−1	24	−144
		4	12	144
	1	3	36	0

$a = 4$ atau $a^2 + 3a + 36 = 0$ (akar- akarnyatidakreal, karena $D < 0$)

Jika $a = 4$, maka $b = a^{\frac{3}{2}} = 4^{\frac{3}{2}} = 8$

Kita juga mempunyai $ab = 1$ atau $b = \frac{1}{a}$.

Substitusikan $b = \frac{1}{a}$ ke $a^{a+b} = b^8$, diperoleh

$$a^{a+\frac{1}{a}} = \left(\frac{1}{a}\right)^8$$

$$a^{a+\frac{1}{a}} = \frac{1}{a^8}$$

$$a^{a+\frac{1}{a}+8} = 1$$

Sehingga salah satu $a = 1$ atau $a + \frac{1}{a} + 8 = 0$

Jika $a = 1$, maka $b = \frac{1}{1} = 1$

$$a+\frac{1}{a}+8=0$$

$$a^2+8a+1=0$$

$$a=\frac{-8\pm\sqrt{64-4}}{2}=\frac{-8\pm\sqrt{60}}{2}=\frac{-8\pm2\sqrt{15}}{2}=-4\pm\sqrt{15}$$

$a=-4+\sqrt{15}$ atau $a=-4-\sqrt{15}$

Jika $a=-4+\sqrt{15}$, maka $b=\frac{1}{-4+\sqrt{15}}=\frac{1}{-4+\sqrt{15}}\times\frac{-4-\sqrt{15}}{-4-\sqrt{15}}=-4-\sqrt{15}$

Jika $a=-4-\sqrt{15}$, maka $b=\frac{1}{-4-\sqrt{15}}=\frac{1}{-4-\sqrt{15}}\times\frac{-4+\sqrt{15}}{-4+\sqrt{15}}=-4+\sqrt{15}$

Terakhir mungkin kita memiliki $ab=-1$ atau $b=-\frac{1}{a}$ dengan $a+b$ adalah bilangan bulat genap.

Substitusikan $b=-\frac{1}{a}$ ke $a^{a+b}=b^8$, diperoleh

$$a^{a-\frac{1}{a}}=\left(-\frac{1}{a}\right)^8$$

$$a^{a-\frac{1}{a}}=\frac{1}{a^8}$$

$$a^{a-\frac{1}{a}+8}=1$$

Sehingga kita harus mempunyai $x=-1$ dan $y=-\frac{1}{-1}=1$

$$a-\frac{1}{a}+8=0$$

$$a^2-8a+1=0$$

$$a=\frac{8\pm\sqrt{64-4}}{2}=\frac{8\pm\sqrt{60}}{2}=\frac{8\pm2\sqrt{15}}{2}=4\pm\sqrt{15}$$

$a=4+\sqrt{15}$ atau $a=4-\sqrt{15}$

Jika $a=4+\sqrt{15}$, maka $b=\frac{1}{4+\sqrt{15}}=\frac{1}{4+\sqrt{15}}\times\frac{4-\sqrt{15}}{4-\sqrt{15}}=4-\sqrt{15}$

Jika $a=4-\sqrt{15}$, maka $b=\frac{1}{4-\sqrt{15}}=\frac{1}{4-\sqrt{15}}\times\frac{4+\sqrt{15}}{4+\sqrt{15}}=4+\sqrt{15}$

Jadi, ada 7 buah solusi: $(4,8)$, $(1,1)$, $\left(-4+\sqrt{15},-4-\sqrt{15}\right)$, $\left(-4-\sqrt{15},-4+\sqrt{15}\right)$, $(-1,1)$, $\left(4+\sqrt{15},4-\sqrt{15}\right)$, $\left(4-\sqrt{15},4+\sqrt{15}\right)$

45. Tentukan jumlah semua akar-akar real x dari persamaan $\left(2^x-4\right)^3+\left(4^x-2\right)^3=\left(4^x+2^x-6\right)^3$.

Solusi: $\left(3^x-9\right)^3+\left(9^x-3\right)^3=\left(9^x+3^x-12\right)^3$

Misalnya $3^x-9=a$, $9^x-3=b$, $a+b=9^x+3^x-12$, sehingga

$$\left(3^x-9\right)^3+\left(9^x-3\right)^3=\left(9^x+3^x-12\right)^3$$

$$a^3+b^3=\left(a+b\right)^3$$

$$a^3+b^3=a^3+b^3+3a^2b+3ab^2$$

$$3ab\left(a+b\right)=0$$

$$a=0\vee b=0\vee a=-b$$

$$3^x-9=0\vee 9^x-3=0\vee 9^x+3^x-12=0$$

$$3^x-9=0\vee 9^x-3=0\vee\left(3^x+4\right)\left(3^x-3\right)=0$$

$$3^x=9(\text{diterima})\vee 9^x=3(\text{diterima})\vee 3^x=3(\text{diterima})\vee 3^x=-4(\text{ditolak})$$

$$x=2\vee x=\frac{1}{2}\vee x=1$$

Jadi, jumlah akar-akarnya adalah $2+\frac{1}{2}+1=3\frac{1}{2}$.

46. Hitunglah x dari persamaan ${}^{3}\log\left(27^{{}^{9}\log x}\right)=p$, jika p merupakan akar dari persamaan $2^{p-4}-3\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{p-5}}=0$.

Solusi:

Misalnya $y=2^{p-4}$, sehingga

$$y-3\frac{1}{2}-\frac{2}{y}=0$$

$$2y^2-7y-4=0$$

$$\left(2y+1\right)\left(y-4\right)=0$$

$$y=-\frac{1}{2}\text{atau } y=4$$

$$2^{p-4}=-\frac{1}{2}(\text{ditolak})\text{atau } 2^{p-4}=4(\text{diterima})$$

$$2^{p-4}=2^2$$

$$p-4=2$$

$$p=6$$

$${}^{3}\log\left(27^{{}^{9}\log x}\right)=6$$

$$\left(3^{\frac{{}^{3}\log x}{2}}\right)^{3}=3^{6}$$

$$3^{{}^{3}\log\sqrt{x}}=3^{2}$$

$$\sqrt{x}=9$$

$$x=81$$

47. Tentukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan
$$\begin{cases} 3^{2(9x-y-2)}-10\cdot 3^{9x-y-1}+81=0 \\ 8x-y+4=0 \end{cases}$$

Solusi:

$8x-y+4=0$ .... (1)

$$3^{2(9x-y-2)}-10\cdot 3^{9x-y-1}+81=0$$

$$3^{-2}\cdot 3^{2(9x-y-1)}-10\cdot 3^{9x-y-1}+81=0$$

Misalnya $p=3^{9x-y-1}$, sehingga

$$\frac{1}{9}p^{2}-10p+81=0$$

$$p^{2}-90p+729=0$$

$$(p-9)(p-81)=0$$

$$p=9\vee p=81$$

$$3^{9x-y-1}=9\vee 3^{9x-y-1}=81$$

$$9x-y-1=2\vee 9x-y-1=4$$

$y=9x-3$ .... (2)

$y=9x-5$ .... (3)

Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh

$$8x-9x+3+4=0$$

$$x=7$$

$$y=9\cdot 7-3=60$$

Dari persamaan (1) dan (3) diperoleh

$$8x-9x+5+4=0$$

$$x=9$$

$$y=9\cdot 9-5=76$$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{(7,60),(9,76)\}$

48. Tentukan penyelesaian dari persamaan $16^{\sin^2 x}+16^{\cos^2 x}=10$.

Solusi:

$$16^{\sin^2 x} + 16^{\cos^2 x} = 10$$
$$16^{\sin^2 x} + 16^{1-\sin^2 x} = 10$$
$$16^{\sin^2 x} + \frac{16}{16^{\sin^2 x}} = 10$$

Misalnya $y = 16^{\sin^2 x}$, sehingga

$$16^{\sin^2 x} + \frac{16}{16^{\sin^2 x}} = 10$$
$$y + \frac{16}{y} = 10$$
$$y^2 - 10y + 16 = 0$$
$$(y-2)(y-8) = 0$$
$$y = 2 \text{ atau } y = 8$$
$$16^{\sin^2 x} = 2 \text{ atau } 16^{\sin^2 x} = 8$$
$$2^{4\sin^2 x} = 2 \text{ atau } 2^{4\sin^2 x} = 2^3$$
$$4\sin^2 x = 1 \text{ atau } 4\sin^2 x = 3$$
$$\sin x = \pm\frac{1}{2} \text{ atau } \sin x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{3}$$
$$\sin x = \frac{1}{2} \text{ atau } \sin x = -\frac{1}{2} \text{ atau } \sin x = \frac{1}{2}\sqrt{3} \text{ atau } \sin x = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$$
$$x = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \vee x = \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + k \cdot 2\pi = \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi \text{ atau}$$
$$x = \frac{7\pi}{6} + k \cdot 2\pi \vee x = \left(\pi - \frac{7\pi}{6}\right) + k \cdot 2\pi = -\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \text{ atau}$$
$$x = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \vee x = \left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + k \cdot 2\pi = \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi \text{ atau}$$
$$x = \frac{4\pi}{3} + k \cdot 2\pi \vee x = \left(\pi - \frac{4\pi}{3}\right) + k \cdot 2\pi = -\frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi$$

49. Carilah penyelesaian dari sistem persamaan

$$\begin{cases} 3^{x-y-1} + 3^{3-x+y} = {}^{7}\log 343^3 + \dfrac{{}^{p}\log 256}{p^{{}^{p}\log 4} \times {}^{p}\log 4} \\ 2^{2x-3y} = \dfrac{1}{4} \end{cases}.$$

Solusi:

$$2^{2x-3y} = \frac{1}{4}$$

$$2^{2x-3y}=2^{-2}$$
$$2x-3y=-2 \text{ .... (1)}$$
$$3^{x-y-1}+3^{3-x+y}={}^{7}\log 343^{3}+\frac{{}^{p}\log 256}{p^{{}^{p}\log 4}\times {}^{p}\log 4}$$
$$3^{x-y-1}+3^{3-x+y}={}^{7}\log\left(7^{3}\right)^{3}+\frac{{}^{p}\log 4^{4}}{4\,{}^{p}\log 4}$$
$$3^{x-y-1}+3^{3-x+y}={}^{7}\log 7^{9}+\frac{4\,{}^{p}\log 4}{4\,{}^{p}\log 4}$$
$$\frac{3^{x-y}}{3}+\frac{3^{3}}{3^{x-y}}=9+1$$
Misalnya $a=3^{x-y}$, sehingga
$$\frac{a}{3}+\frac{27}{a}=10$$
$$a^{2}-30a+81=0$$
$$(a-3)(a-27)=0$$
$$a=3\vee a=27$$
$$3^{x-y}=3\vee 3^{x-y}=27$$
$$x-y=1\vee x-y=3$$
$$y=x-1 \text{....(2)}$$
$$y=x-3 \text{....(3)}$$
Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh
$$2x-3(x-1)=-2$$
$$2x-3x+3=-2$$
$$x=5$$
$$y=5-1=4$$
Dari persamaan (1) dan (3) diperoleh
$$2x-3(x-3)=-2$$
$$2x-3x+9=-2$$
$$x=11$$
$$y=11-3=8$$
Jadi, penyelesaiannya adalah $(5,4);(11,8)$.

50. Tentukan nilai *x* yang memenuhi persamaan $4^{x-\sqrt{x^{2}-5}}-12\cdot 2^{x-1-\sqrt{x^{2}-5}}+8=0$

Solusi:
$$4^{x-\sqrt{x^{2}-5}}-12\cdot 2^{x-1-\sqrt{x^{2}-5}}+8=0$$

$$2^{2\left(x-\sqrt{x^2-5}\right)}-12\cdot 2^{-1}\cdot 2^{x-\sqrt{x^2-5}}+8=0$$

$$2^{2\left(x-\sqrt{x^2-5}\right)}-6\cdot 2^{x-\sqrt{x^2-5}}+8=0$$

Misalnya $y=2^{x-\sqrt{x^2-5}}$, sehingga

$$y^2-6y+8=0$$

$$(y-2)(y-4)=0$$

$$y=2 \text{ atau } y=4$$

$$2^{x-\sqrt{x^2-5}}=2 \text{ atau } 2^{x-\sqrt{x^2-5}}=4$$

$$x-\sqrt{x^2-5}=1 \text{ atau } x-\sqrt{x^2-5}=2$$

$$x-1=\sqrt{x^2-5} \text{ atau } x-2=\sqrt{x^2-5}$$

$$x^2-2x+1=x^2-5 \text{ atau } x^2-4x+4=x^2-5$$

$$2x=6 \text{ atau } 4x=9$$

$$x=3 \text{ atau } x=\frac{9}{4}$$