Solusi Pengayaan Matematika
Edisi 4

Nomor Soal: 31-40

31. Diberikan persamaan $9\left[{}^{(8x-15)}\log^{-1} x \right] - 14 = 2\,{}^{x}\log(8x-15)$ yang akar-akarnya a dan b, dengan $a > b$. Angka satuan dari $b^{\frac{2007a}{5}}$ adalah ….

    A. 1 B. 2 C. 3 D. 7 E. 9

    Solusi: [C]

    Persamaan $9\left[{}^{(8x-15)}\log^{-1} x \right] - 14 = 2\,{}^{x}\log(8x-15)$ terdefinisi bila $x > \frac{15}{8}$ dan $x \neq 2$

    $$9\left[{}^{(8x-15)}\log^{-1} x \right] - 14 = 2\,{}^{x}\log(8x-15)$$

    $$\frac{9}{{}^{(8x-15)}\log x} - 14 = 2\,{}^{x}\log(8x-15)$$

    $$9\,{}^{x}\log(8x-15) - 14 = 2\,{}^{x}\log(8x-15)$$

    $${}^{x}\log(8x-15) = 2$$

    $$8x - 15 = x^2$$

    $$x^2 - 8x + 15 = 0$$

    $$(x-3)(x-5) = 0$$

    $x = 3 = b$ atau $x = 5 = a$

    Pola angka satuan dari 3^n, dengan n bilangan asli adalah 3, 9, 7, 1.

    Jadi, angka satuan dari $b^{\frac{2007a}{5}} = 3^{\frac{2007\times5}{5}} = 3^{2007} = 3^{501\times4+3}$ adalah 7.

32. Jika N adalah akar dari persamaan $\log\sqrt{5\log x - 1} - 1 = \frac{1}{2}\log 1{,}08 - \log\sqrt{2\log x + 8}$, maka nilai jumlah angka-angka $N + 1907$ adalah ….

    A. 9 B. 7 C. 8 D. 5 E. 4

    Solusi: [A]

    Agar persamaan itu memiliki arti, maka haruslah $\log x > \frac{1}{5}$, sehingga $x > \sqrt[5]{10}$, sehingga persamaan itu dapat dijabarkan menjadi:

$\log\sqrt{5\log x-1}-1 \ = \frac{1}{2}\log 1{,}08-\log\sqrt{2\log x+8}$

$\log\sqrt{5\log x-1}-\log 10 \ = \log\sqrt{1{,}08}-\log\sqrt{2\log x+8}$

$\log\frac{\sqrt{5\log x-1}}{10} \ = \log\frac{\sqrt{1{,}08}}{\sqrt{2\log x+8}}$

$\frac{\sqrt{5\log x-1}}{10} \ = \frac{\sqrt{1{,}08}}{\sqrt{2\log x+8}}$

$\frac{5\log x-1}{100} \ = \frac{108}{2\log x+8}$

$10\log^2 x+38\log x-116=0$

$(\log x-2)(10\log x+58)=0$

$\log x=2$ (diterima) atau $\log x=-\frac{29}{5}$ (ditolak, karena $\log x>\frac{1}{5}$)

$x=100=N$

$N+1907=100+1907=2007$

Jadi, jumlah angka-angka $N+1907$ adalah 2 + 0 + 0 + 7 = 9.

33. Tentukan semua nilai c sedemikian sehingga persamaan $\log(cx)=2\log(x+1)$ yang mempunyai solusi tepat satu akar real.

A. $c=4$
B. $c<0$
C. $c=4$ atau $c<0$
D. $c=4$ atau $c=-1$
E. $c>0$

Solusi: [C]

Persamaan terdefinisi untuk $x+1>0$ atau $x>-1$ dan $cx>0$.

$\log(cx)=2\log(x+1)$

$cx=(x+1)^2$

$cx=x^2+2x+1$

$x^2+(2-c)x+1=0$

Persamaan kuadrat mempunyai satu akar solusi jika $c=4$ atau $c=0$.

Karena $cx>0$, maka $c\neq 0$.

Persamaan kuadrat mempunyai dua akar real untuk $c>4$ dan tidak mempunyai akar real jika $c\in(0,4)$.

Persamaan kuadrat hanya satu solusi real untuk $c=4$; dan dua akar real untuk $c<0$.

Bagaimanapun dari kasus yang terakhir, persamaan kuadrat hanya mempunyai satu akar real pada interval $(-1,0)$ demikian pula untuk $c<0$ persamaan kuadrat hanya memberikan satu akar real.

Jadi, persamaan hanya mempunyai satu solusi akar real untuk $c=4$ atau $c<0$.

34. Jika M adalah solusi dari persamaan ${}^{x-2}\log x + {}^{x-2}\log 0{,}28 = 2$, maka nilai $M^2 - 2M + 1$ adalah ….

A. 100 B. 64 C. 36 D. 25 E. 16

Solusi: [C]

Persamaan ${}^{x-2}\log x + {}^{x-2}\log 0{,}28 = 2$ terdefinisi bila $x>2$ dan $x \neq 3$.

$${}^{x-2}\log x + {}^{x-2}\log 0{,}28 = 2$$

$${}^{x-2}\log x + {}^{x-2}\log \frac{28}{100} = {}^{x-2}\log (x-2)^2$$

$${}^{x-2}\log \frac{28}{100}x = {}^{x-2}\log (x-2)^2$$

$$\frac{28}{100}x = (x-2)^2$$

$$7x^2 - 53x + 28 = 0$$

$$x = \frac{-(-53) \pm \sqrt{(-53)^2 - 4\cdot 7\cdot 28}}{2.7} = \frac{53 \pm 45}{14}$$

$x = 7$ (diterima) atau $x = \frac{4}{7}$ (ditolak, karena $x>2$)

Jadi, nilai $M^2 - 2M + 1 = (M-1)^2 = (7-1)^2 = 36$.

35. Diketahui persamaan $\left(\frac{1}{x}\right)^{-\log x} - 5\left(\frac{1}{x}\right)^{-\frac{\log x}{2}} = 24$. Tentukan nilai $\log^2 x$.

A. $\log 64$ B. $\log 32$ C. $\log 32$ D. $\log 24$ E. $\log 4$

Solusi: [A]

Persamaan itu terdefinisi bila $x>0$.

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{-\log x} - 5\left(\frac{1}{x}\right)^{-\frac{\log x}{2}} = 24 \Leftrightarrow x^{\log x} - 5x^{\frac{\log x}{2}} = 24$$

Misalnya $x^{\frac{\log x}{2}} = y$, maka persamaan yang diberikan ekuivalen dengan persamaan

$$y^2 - 5y - 24 = 0$$

$$(y+3)(y-8) = 0$$

$y = -3$ (ditolak) atau $y = 8$ (diterima)

$$x^{\frac{\log x}{2}} = 8$$

$$x^{\log x} = 64$$

$\log^2 x = \log 64$

36. Jika a, b, dan c adalah akar-akar sistem persamaan $\begin{cases} x + \log(x + \sqrt{x^2+1}) = y \\ y + \log(y + \sqrt{y^2+1}) = z \\ z + \log(z + \sqrt{z^2+1}) = x \end{cases}$,

maka nilai $a+b+c$ adalah ….

A. 4 B. 3 C. 2 D. 1 E. 0

Solusi: [E]

Soal ini benar jika nilai $x = y = z = 0$, bukti:

1) Jika $x > 0$, maka $\log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) > 0$, sehingga untuk persamaan pertama didapat $y > x$ kemudian dari persamaan kedua dan ketiga berturut-turut diperoleh $z > y$ dan $x > z$. Dengan demikian, diperoleh hubungan bahwa $x > z > y > x > 0$, sudah barang tentu hal ini tidak mungkin.

2) Jika $x < 0$ maka $x + \sqrt{x^2+1} = \dfrac{1}{-x+\sqrt{x_2+1}} < 1$, sehingga $y < x < 0$, maka akan didapat hubungan pertidakasamaan $x < z < y < x < 0$. Hal ini pun tidak mungkin.

Jadi, sistem persamaan itu hanya dipenuhi oleh $x = y = z = 0$

Karena itu, nilai dari $a+b+c = 0+0+0 = 0$.

37. Hitunglah jumlah solusi dari $\left[{}^{a}\log(2a-7)\right]\left({}^{a-2}\log a\right) = -\dfrac{1}{2}$.

A. $\dfrac{1}{2}\sqrt{3}$ B. 3 C. $3+\dfrac{1}{2}\sqrt{3}$ D. $\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$ E. $2+\dfrac{3}{2}\sqrt{3}$

Solusi: [C]

$$\left[{}^{a}\log(2a-7)\right]\left({}^{a-2}\log a\right) = -\frac{1}{2}.$$

$$\frac{\log(2a-7)}{\log a} \times \frac{\log a}{\log(a-2)} = -\frac{1}{2}$$

$$\log(2a-7) = -\frac{1}{2}\log(a-2)$$

$$\log(2a-7) = \log\frac{1}{\sqrt{a-2}}$$

$$2a-7 = \frac{1}{\sqrt{a-2}}$$

Misalnya $x = \sqrt{a-2} \Leftrightarrow x^2 = a-2 \Leftrightarrow a = x^2+2 \Leftrightarrow 2a = 2x^2+4$, sehingga

$$2x^2+4-7=\frac{1}{x}$$

$$2x^3-3x-1=0$$

$$(x+1)(2x^2-2x-1)=0$$

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 2 & 0 & -3 & -1 \\ & & -2 & 2 & 1 \\ \hline & 2 & -2 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

$x=-1$ atau $x=\frac{2\pm\sqrt{4+8}}{4}=\frac{2\pm2\sqrt{3}}{4}=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$

$x=-1$ (ditolak, $x>0$) atau $x=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$ (ditolak, $x>0$) atau $x=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ (diterima)

$$\frac{1+\sqrt{3}}{2}=\sqrt{a-2}$$

$$4+2\sqrt{3}=4(a-2)$$

$$4+2\sqrt{3}=4a-8$$

$$4a=12+2\sqrt{3}$$

$$a=3+\frac{1}{2}\sqrt{3}$$

38. Diberikan persamaan ${}^{x}\log a+{}^{y}\log a=4\,{}^{xy}\log a$. Jika x dan y adalah bilangan pada interval (0,1), a adalah bilangan bulat positif dan $a\neq 1$, maka hubungan yang benar adalah ….

A. $x=2y$ B. $2x=y$ C. $x=-2y$ D. $x=-y$ E. $x=y$

Solusi: [E]

$${}^{x}\log a+{}^{y}\log a=4\,{}^{xy}\log a$$

$$\frac{1}{{}^{a}\log x}+\frac{1}{{}^{a}\log y}=\frac{4}{{}^{a}\log xy}$$

$$\frac{{}^{a}\log x+{}^{a}\log y}{{}^{a}\log x.{}^{a}\log y}=\frac{4}{{}^{a}\log x+{}^{a}\log y}$$

$$\left({}^{a}\log x+{}^{a}\log y\right)^2=4\,{}^{a}\log x.{}^{a}\log y$$

$$\left({}^{a}\log x-{}^{a}\log y\right)^2=0$$

$${}^{a}\log x={}^{a}\log y$$

$$x=y$$

39. Jika ${}^{12}\log\left({}^{6}\log\left({}^{3}\log{}^{2}\log x\right)\right)=0$, maka angka satuan dari bilangan x adalah ....

A. 8 B. 60 C. 10^8 D. 10^9 E. 10^{10}

Solusi: [C]

$${}^{12}\log\left({}^{6}\log\left({}^{3}\log{}^{2}\log x\right)\right)=0$$

$^{6}\log\left({}^{3}\log{}^{2}\log x\right)=1$

$^{3}\log{}^{2}\log x=6$

$^{2}\log x=3^{6}=729$

$x=2^{729}$

Pola angka satuan dari 2^{n}, dengan n bilangan asli adalah 2, 4, 8, 6.

Jadi, angka satuan dari bilangan $x=2^{729}=2^{182\times 4+1}$ adalah 2.

40. Jika x adalah bilangan terkecil yang memenuhi persamaan $\left({}^{2}\log x\right)^{3}-{}^{2}\log 2x^{3}=\left({}^{2}\log x\right)^{2}-{}^{2}\log x^{2}-{}^{2}\log 2$, maka nilai $x^{-1-\sqrt{5}}$ adalah ....

A. 8 B. 4 C. 2 D. $\frac{1}{4}$ E. $\frac{1}{2}$

Solusi: [B]

Misalnya $^{2}\log x=y$

$\left({}^{2}\log x\right)^{3}-{}^{2}\log 2x^{3}=\left({}^{2}\log x\right)^{2}-{}^{2}\log x^{2}-{}^{2}\log 2$

$\left({}^{2}\log x\right)^{3}-{}^{2}\log 2-3{}^{2}\log x=\left({}^{2}\log x\right)^{2}-2{}^{2}\log x-1$

$y^{3}-1-3y=y^{2}-2y-1$

$y^{3}-y^{2}-y=0$

$y\left(y^{2}-y-1\right)=0$

$y=0$ atau $y^{2}-y-1=0$

$y=0$ atau $y=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

$^{2}\log x=0$ atau $^{2}\log x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ atau $^{2}\log x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$x=1$ atau $x=2^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$ atau $x=2^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}$

Sehingga bilangan x terkecil adalah $2^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}$.

Jadi, $x^{-1-\sqrt{5}}=\left(2^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}\right)^{-1-\sqrt{5}}=2^{\frac{-\left(1-\sqrt{5}\right)\left(1+\sqrt{5}\right)}{2}}=2^{\frac{-(1-5)}{2}}=2^{2}=4$