Solusi Pengayaan Matematika

Edisi 3

Nomor Soal: 21-30

21. Jika $x^3 - 3\sqrt{5}x^2 + 15x - 5\sqrt{5} - 1 = 0$, tentukan nilai dari

    $x^5 - 4x^4 - 8x^3 + 24x^2 + 32x + 2010$.

    Solusi:

    Catatan bahwa

    $x^3 - 3\sqrt{5}x^2 + 15x - 5\sqrt{5} - 1 = 0$

    $\left(x - \sqrt{5}\right)^3 = 1$

    $x - \sqrt{5} = 1$

    $x - 1 = \sqrt{5}$

    $x^2 - 2x + 1 = 5$

    $x^2 - 2x - 4 = 0$

    $$\begin{array}{r l}
    & x^3 - 2x^2 - 8x \\
    x^2 - 2x - 4 \,\big)\! & x^5 - 4x^4 - 8x^3 + 24x^2 + 32x + 2010 \\
    & \underline{x^5 - 2x^4 - 4x^3} \\
    & -2x^4 - 4x^3 + 24x^2 + 32x + 2010 \\
    & \underline{-2x^4 + 4x^3 + 8x^2} \\
    & -8x^3 + 16x^2 + 32x + 2010 \\
    & \underline{-8x^3 + 16x^2 + 32x} \\
    & 2010
    \end{array}$$

    Selanjutnya

    $x^5 - 10x^2 + 2010 = \left(x^2 - 2x - 4\right)\left(x^3 - 2x^2 - 8x\right) + 2010 = 2010$

22. Jika $\dfrac{2}{x^2(x-2)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x^2} + \dfrac{C}{x-2}$, berapakah $6A - 5B + 2C$?

    A. 3   B. –1   C. 5   D. 7   E. 8

    Solusi: [A]

    $\dfrac{2}{x^2(x-2)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x^2} + \dfrac{C}{x-2}$

    $2 = Ax\left(x-2\right) + B\left(x-2\right) + Cx^2$

    Jika $x = 0$, maka $B = -1$.

    Jika $x = 2$, maka $C = \dfrac{1}{2}$.

    Jika $x = 1$, maka $2 = -A - B + C \Leftrightarrow 2 = -A + 1 + \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow A = -\dfrac{1}{2}$

    Jadi, $6A - 5B + 2C = 6\left(-\dfrac{1}{2}\right) - 5\left(-1\right) + 2 \cdot \dfrac{1}{2} = -3 + 5 + 1 = 3$.

23. Terdapat dua nilai k untuk persamaan $4x^2+kx-8x+9=0$ yang akar-akarnya kembar. Berapakah jumlah nilai k?

A. 24 B. 16 C. 8 D. 8 E. 6

Solusi: [B]

$4x^2+kx-8x+9=0$

$4x^2+(k-8)x+9=0$

$D=b^2-4ac=0$

$(k-8)^2-4\cdot4\cdot9=0$

$(k-8)^2=144$

$k-8=\pm12$

$k=20\vee k=-4$

Jadi, jumlah nilai k adalah $20-4=16$

24. Jika a menyatakan jumlah koefisien polinomial $\sum_{k=1}^{n} f(x)=n^2+2n$, tentukan nilai $a+f(a)$.

A. 3 B. 4 C. 5 D. 6 E. 9

Solusi: [E]

$\sum_{k=1}^{n} f(x)=n^2+2n$

Jika $n=x$, maka

$f(1)+f(2)+f(x)+....+f(x-1)+f(x)=x^2+2x$ .... (1)

Jika $n=x-1$, maka

$f(1)+f(2)+f(3)+....+f(x-1)=(x-1)^2+2(x-1)$ .... (1)

Persamaan (1) dikurangi persamaan (2) adalah

$f(x)=x^2+2x-(x-1)^2-2(x-1)$

$f(x)=x^2+2x-x^2+2x-1-2x+2$

$f(x)=2x+1$

Koefisiennya adalah 2 dan 1, sehingga jumlahnya adalah $a=2+1=3$.

Jadi, nilai $a+f(a)=3+f(3)=3+2\cdot3+1=9$.

25. Tentukan solusi real dari persamaan $x^3+12x^2+48x+60=0$.

A. $-4-\sqrt[3]{4}$ C. $-2-2\sqrt[3]{4}$ E. $-2+\sqrt[3]{4}$

B. $-4+\sqrt[3]{4}$ D. $-2+2\sqrt[3]{4}$

Solusi: [B]

$x^3+12x^2+48x+60=0$

$x^3+12x^2+48x+64-4=0$

$(x+4)^3-4=0$

$(x+4)^3=4$

$x=-4+\sqrt[3]{4}$

26. Diberikan α_1, α_2, dan α_3 menyatakan akar-akar $x^3=x-1$. Hitunglah nilai dari $1005\left(\alpha_1^4+\alpha_2^4+\alpha_3^4\right)$.

A. 6 B. 5 C. 4 D. 3 E. 2

Solusi: [C]

$x^3=x-1$

$x^3-x+1=0$

Menurut Rumus Vieta:

$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=-\frac{b}{a}=-\frac{0}{1}=0$

$\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3=\frac{c}{a}=\frac{-1}{1}=-1$

Sehingga,

$\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2=\left(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\right)^2-2\left(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3\right)=(0)^2-2(-1)=2$

$x^3=x-1$

$x^4=x^2-x$

$\alpha_1^4=\alpha_1^2-\alpha_1$

$\alpha_2^4=\alpha_2^2-\alpha_2$

$\alpha_3^4=\alpha_3^2-\alpha_3$

$1005\left(\alpha_1^4+\alpha_2^4+\alpha_3^4\right)=1005\left[\left(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2\right)-\left(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\right)\right]$

$=1005(2+0)=2010$

27. Diberikan a, b , dan c menyatakan tiga akar dari $x^3-23x-31$. Berapa nilai dari $a^3+b^3+c^3$?

A. 93 B. 63 C. 62 D. 49 E. 33

Solusi: [A]

Kerena a, b , and c adalah $x^3-23x-31$, maka $a+b+c=-\frac{0}{1}=0$

$x^3 = 23x + 31$

$a^3 = 23a + 31$

$b^3 = 23b + 31$

$c^3 = 23c + 31$

$a^3 + b^3 + c^3 = 23(a + b + c) + 3 \times 31 = 23(0) + 93 = 93$

28. Diberikan persamaan $x^3 + 5x^2 - 3x - 2 = 0$, dengan akar-akar α, β, dan γ. Persamaan kubik yang akar-akarnya kebalikan dari akar-akar persamaan tersebut adalah $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$. Nilai dari $a + b + c + d = ...$

A. 6 B. 5 C. 4 D. 2 E. 1

Solusi: [E]

Persamaan kubik $x^3 + 5x^2 - 3x - 2 = 0$, dengan akar-akarnya α, β, dan γ.

Menurut rumus Vieta:

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{-b}{a} = -5$$

$$\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = \frac{c}{a} = -3$$

$$\alpha\beta\gamma = \frac{-d}{a} = 2$$

Sehingga,

Persamaan kubik yang diminta akar-akarnya adalah $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, dan $\frac{1}{\gamma}$, maka

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma}{\alpha\beta\gamma} = \frac{-3}{2}$$

$$\frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\beta\gamma} + \frac{1}{\beta\gamma} = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{\alpha\beta\gamma} = \frac{-5}{2}$$

$$\frac{1}{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2}$$

Persamaan kubik yang diminta adalah

$$x^3 - \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right)x^2 + \left(\frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\beta\gamma} + \frac{1}{\beta\gamma}\right)x + \frac{1}{\alpha\beta\gamma} = 0$$

$$x^3 - \left(\frac{-3}{2}\right)x^2 + \left(\frac{-5}{2}\right)x + \frac{1}{2} = 0$$

$$2x^3 + 3x^2 - 5x + 1 = 0$$

Karena itu $a = 2, b = 3, c = -5, \text{dan } d = 1$, sehingga

$a + b + c + d = 2 + 3 - 5 + 1 = 1$.

29. Diberikan $P_0(x) = x^3 + 9x^2 + 9x + 4$. Untuk setiap bilangan bulat $n \ge 1$, ditentukan $P_n(x) = P_{n-1}(x-n)$. Berapakah koefisien dari x^2 dalam $P_{100}(x)$?

A. 5050 B. 1515 C. -1514 D. -5050 E. -15141

Solusi: [E]

$$P_{100}(x) = P_{99}(x-100) = P_{98}(x-100-99) = \ldots = P_0(x-100-99-\ldots-1)$$

$$= P_0(x-5050) = (x-5050)^3 + 9(x-5050)^2 + 9(x-5050) + 4$$

$$= x^3 - 15150x^2 + 9x^2 + \ldots = x^3 - 15141x^2 + \ldots$$

Jadi, koefisien x^2 adalah -15141.

30. Buktikan bahwa bilangan $\sqrt[3]{45+29\sqrt{2}} + \sqrt[3]{45-29\sqrt{2}}$ adalah bilangan rasional.

Bukti 1:

Konsep: $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$.

$$\sqrt[3]{45+29\sqrt{2}} + \sqrt[3]{45-29\sqrt{2}} = x$$

$$45+29\sqrt{2}+45-29\sqrt{2}+3\sqrt[3]{\left(45+29\sqrt{2}\right)\left(45-29\sqrt{2}\right)}\left(\sqrt[3]{45+29\sqrt{2}}+\sqrt[3]{45-29\sqrt{2}}\right) = x^3$$

$$90 + 3\sqrt[3]{2025-1682}\,(x) = x^3$$

$$90 + 3x\sqrt[3]{343} = x^3$$

$$x^3 - 21x - 90 = 0$$

$$(x-6)\left(x^2+6x+15\right) = 0$$

$x = 6$ atau $x^2 + 6x + 15 = 0$ (ditolak, karena tidak mempunyai akar-akar real)

Karena $\sqrt[3]{45+29\sqrt{2}} + \sqrt[3]{45-29\sqrt{2}} = 6$, maka terbukti bahwa $\sqrt[3]{45+29\sqrt{2}} + \sqrt[3]{45-29\sqrt{2}}$ adalah bilangan rasional.

Bukti 2:

Gunakan identitas: Jika $a+b+c=0$, maka $a^3+b^3+c^3 = 3abc$.

$$\sqrt[3]{45+29\sqrt{2}} + \sqrt[3]{45-29\sqrt{2}} = x$$

$$\sqrt[3]{45+29\sqrt{2}} + \sqrt[3]{45-29\sqrt{2}} - x = 0$$

$$\left(\sqrt[3]{5+29\sqrt{2}}\right)^3 + \left(\sqrt[3]{5-29\sqrt{2}}\right)^3 + (-x)^3 = 3\left(\sqrt[3]{5+29\sqrt{2}}\right)\left(\sqrt[3]{5-29\sqrt{2}}\right)(-x)$$

$$45+29\sqrt{2}+45-29\sqrt{2}-x^3 = -3x\sqrt[3]{2025-1682}$$

$$90 - x^3 = -3x\sqrt[3]{343}$$

$$x^3 - 21x - 90 = 0$$

$$(x-6)\left(x^2+6x+15\right) = 0$$

$x=6$ atau $x^2+6x+15=0$ (ditolak, karena tidak mempunyai akar-akar real)

Karena $\sqrt[3]{45+29\sqrt{2}}+\sqrt[3]{45-29\sqrt{2}}=6$, maka terbukti bahwa $\sqrt[3]{45+29\sqrt{2}}+\sqrt[3]{45-29\sqrt{2}}$ adalah bilangan rasional.