

Solusi Pengayaan Matematika

Edisi 3

Nomor Soal: 21-30

21. Jika akar-akar persamaan $8x^3 - px^2 + 78x - 27 = 0$ merupakan barisan geometri, berapakah sisa dari $\frac{2009}{p}$?

- A. 52 B. 36 C. 33 D. 23 E. 13

Solusi: [C]

Misalnya akar-akarnya yang merupakan barisan geometri $\frac{a}{r}, a, ar$.

$$x_1 x_2 x_3 = -\frac{d}{a}$$

$$\frac{a}{r} \times a \times ar = -\frac{-27}{8}$$

$$a^3 = \frac{27}{8}$$

$$a = \frac{3}{2}$$

$$x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = \frac{c}{a}$$

$$\frac{a}{r} \times a + \frac{a}{r} \times ar + a \times ar = \frac{78}{8}$$

$$a^2 \left(\frac{1}{r} + 1 + r \right) = \frac{39}{4}$$

$$\left(\frac{3}{2} \right)^2 \frac{r^2 + r + 1}{r} = \frac{39}{4}$$

$$\frac{r^2 + r + 1}{r} = \frac{13}{3}$$

$$3r^2 + 3r + 3 = 13r$$

$$3r^2 - 10r + 3 = 0$$

$$(3r - 1)(r - 3) = 0$$

$$r = \frac{1}{3} \vee r = 3$$

Jika $a = \frac{3}{2}$ dan $r = \frac{1}{3}$, maka akar-akarnya adalah $\frac{9}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}$.

Jika $a = \frac{3}{2}$ dan $r = 3$, maka akar-akarnya adalah $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{9}{2}$.

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$$

$$\frac{9}{2} + \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = -\frac{-p}{8}$$

$$\frac{13}{2} = \frac{p}{8}$$

$$p = 52$$

$$\frac{2009}{p} = \frac{2009}{52} = 38 + \frac{33}{52}$$

Jadi, sisanya adalah 33.

22. Jika persamaan $x^4 - px^3 + q = 0$ mempunyai sebuah akar bilangan bulat, dengan p dan q bilangan prima, maka nilai pq adalah

A. 6 B. 10 C. 14 D. 15 E. 21

Solusi: [A]

Misalnya r adalah sebuah akar bulat, sehingga

$$r^4 - pr^3 + q = 0$$

$$q = pr^3 - r^4$$

$$q = r^3(p - r)$$

Karena q bilangan prima, maka $r = 1$ dan $q = p - 1$, sehingga $p = 3$ dan $q = 2$.

23. Jika x_1, x_2, x_3 , dan x_4 adalah akar-akar persamaan $4x^4 - 3x^3 - x^2 + 2x - 6 = 0$

Berapakah nilai $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}$?

A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{3}$ D. 2 E. 3

Solusi: [C]

Gunakan Teorema Vieta:

Jika $x_1, x_2, x_3,$ dan x_4 adalah akar-akar persamaan pangkat empat $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$, maka

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = \frac{c}{a}$$

$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -\frac{d}{a}$$

$$x_1x_2x_3x_4 = \frac{e}{a}$$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} = \frac{x_1x_2x_3 + x_1x_3x_4 + x_1x_2x_4 + x_1x_2x_3}{x_1x_2x_3x_4} = \frac{-\frac{d}{a}}{\frac{e}{a}} = \frac{-\frac{d}{a}}{\frac{-6}{4}} = \frac{1}{3}$$

24. Suku banyak $P(x)$ dibagi $(x-19)$ sisanya adalah 99 dan dibagi $(x-99)$ sisanya 19. Berapakah sisanya jika $P(x)$ dibagi $(x-19)(x-99)$?
 A. $-x+118$ B. $-x-118$ C. $x-18$ D. $-11x+8$ E. $-8x+118$

Solusi: [A]

$$P(x) = (x-19)(x-99)h(x) + ax + b$$

$$P(19) = (19-19)(19-99)h(19) + 19a + b = 99$$

$$19a + b = 99 \dots (1)$$

$$P(99) = (99-19)(99-99)h(99) + 99a + b = 19$$

$$99a + b = 19 \dots (2)$$

Persamaan (1) – persamaan (2) menghasilkan

$$-80a = 80$$

$$a = -1$$

$$19(-1) + b = 99$$

$$b = 118$$

Jadi, sisanya adalah $-x+118$.

25. Diketahui $x^3 + y^3 - 3x^2 + 6y^2 + 3x - 12y + 6 = 0$. Jika x dan y adalah bilangan bulat dan (x_1, y_1) dan (x_2, y_2) penyelesaian persamaan itu, carilah nilai $x_1 + x_2$.
 A. 1 B. 2 C. 3 D. 4 E. 5

Solusi: [C]

$$x^3 + y^3 - 3x^2 + 6y^2 + 3x - 12y + 6 = 0$$

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + y^3 + 6y^2 - 12y + 8 - 1 = 0$$

$$(x-1)^3 + (y+2)^3 = 1$$

Karena x dan y bulat, maka:

Kemungkinan 1:

$$(x-1)^3 = 1 \text{ dan } (y+2)^3 = 0$$

$$x = 2 \text{ dan } y = 2$$

Kemungkinan 2:

$$(x-1)^3 = 0 \text{ dan } (y+2)^3 = 1$$

$$x = 1 \text{ dan } y = -1$$

$$\text{Jadi, } x_1 + x_2 = 2 + 1 = 3$$

26. Jika $15x^2 - 9x + 8 = (ax + b)(cx + d)$, nilai dari $ac + bd = \dots$

A. $\frac{8}{15}$

B. $\frac{9}{15}$

C. 17

D. 23

E. 24

Solusi: [D]

$$15x^2 - 9x + 8 = (ax + b)(cx + d)$$

$$15x^2 - 9x + 8 = acx^2 + (ad + bx)x + bd$$

Karenanya $ac = 15$ dan $bd = 8$, sehingga $ac + bd = 15 + 8 = 23$.

27. Jika bilangan N menyatakan koefisien dari x^7 pada ekspansi atau penjabaran

$$(x-2)^9(x^2-3x+5), \text{ maka jumlah angka-angka bilangan } N \text{ adalah } \dots$$

A. 24

B. 20

C. 19

D. 18

E. 14

Solusi: [D]

Ekspansi sedikit dari

$$(x-2)^9 = x^9 + 9x^8(-2)^1 + 36x^7(-2)^2 + 84x^6(-2)^3 + 126x^5(-2)^4$$

$$\text{Kita hanya memerlukan } [36x^7(-2)^2 + 84x^6(-2)^3 + 126x^5(-2)^4] \times$$

$$(x^2 - 3x + 5)$$

$$5(36)(4) = 720 \rightarrow 84(-8)(-3) = 2016 \rightarrow 126(16) = 2016$$

$$720 + 2016 + 2016 = 4752$$

$$N = 720 + 2016 + 2016 = 4752$$

Jadi, jumlah angka-angka bilangan N adalah $4 + 7 + 5 + 2 = 18$.

28. Berapakah sisa pembagian jika $f(x) = x^{2009} - 6x + 2$ dibagi dengan $(x-2)$?

A. $2^{2010} - 10$

C. $2^{2009} - 14$

E. $2^{2009} + 10$

B. $2^{2009} - 10$

D. $2^{2009} + 14$

Solusi: [B]

Jika $f(x)$ dibagi dengan $x - a$ maka sisanya adalah $f(a)$. Karena itu sisanya adalah $2^{2009} - 6 \cdot 2 + 2 = 2^{2009} - 10$.

29. Berapakah sisa pembagian $f(x) = x^{2009} + x^2 + x + 1$ jika dibagi $(x + 1)$?
 A. 0 B. -1 C. 1 D. 79 E. 2009

Solusi: [A]

Sisa pembagiannya adalah

$$f(-1) = (-1)^{2009} + (-1)^2 + (-1) + 1 = -1 + 1 - 1 + 1 = 0$$

30. Diberikan $\frac{16}{x^2 - 4} = \frac{A}{x + 4} - \frac{B}{x - 4}$. Tentukan $A + B$.

- A. 4 B. 2 C. 0 D. -2 E. -4

Solusi: [E]

$$\frac{16}{x^2 - 4} = \frac{A}{x + 4} - \frac{B}{x - 4}$$

$$\frac{16}{x^2 - 16} = \frac{A(x - 4) - B(x + 4)}{(x + 4)(x - 4)}$$

$$16 = A(x - 4) - B(x + 4)$$

Jika $x = 4$, maka $16 = A(4 - 4) - B(4 + 4) \Leftrightarrow B = -2$

Jika $x = -4$, maka $16 = A(-4 - 4) - B(-4 + 4) \Leftrightarrow A = -2$

Jadi, $A + B = -2 - 2 = -4$