Solusi Pengayaan Matematika
Edisi 3

Nomor Soal: 21-30

21. Diberikan

A = jumlah akar-akar persamaan: $x^5 - 8x^3 - 6x^2 + 7x + 2007 = 0$

B = hasil kali akar-akar dari $2x^3 - x^2 - 22x - 4014 = 0$

C = nilai p sehingga $x - 1$ adalah faktor dari $x^3 - px^2 - 6x + 6p$.

D = nilai k sehingga jumlah akar-akarnya $2x^2 - kx + 2007 = 0$ adalah 2007.

Jika $N = A - B + 2007C + D$, maka jumlah angka-angka bilangan N adalah ....

Solusi:

$$A = \frac{-b}{a} = 0$$

$$B = \frac{-(-4014)}{2} = 2007$$

$1 - p - 6 + 6p = 0 \to p = 1$, sehingga $C = 1$

$$-\frac{-k}{2} = 2007$$

$k = 4014$, sehingga $D = 4014$

$N = A - B + 2007C + D = 0 - 2007 + 2007 \cdot 1 + 4014 = 4014$

Jadi, jumlah angka-angka bilangan N adalah 4 + 0 + 1 + 4 = 9.

22. Diberikan polinom $F(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$ dan untuk empat bilangan bulat yang berbeda a, b, c, d polinom F mempunyai $F(a) = F(b) = F(c) = F(d) = 5$. Tunjukkan bahwa tidak terdapat bilangan bulat k sehingga $F(k) = 8$.

Solusi:

Misalnya $G(x) = F(x) - 5$. Dari teorema faktor kita memperoleh bahwa $x - a$, $x - b$, $x - c$, dan $x - d$ adalah faktor dari $G(x)$, akibatnya terdapat polinom $H(x)$, sehingga:

$G(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)H(x)$

Jika k adalah bilangan bulat sehingga $F(x) = 8$, maka $G(k) = 8 - 5 = 3$ atau

$(k-a)(k-b)(k-c)(k-d)H(k) = 3$

Tetapi yang bersifat seperti ini tidak ada, karena faktor dari 3 hanyalah –3, –1, 1, 3, dan a, b, c, d empat bilangan bulat yang berbeda.

23. Carilah polinom $F(x)$ dan $G(x)$ sehingga $\left(x^8 - 1\right)F(x) + \left(x^5 - 1\right)G(x) = x - 1$.

Solusi:

$$\left(x^8 - 1\right)F(x) + \left(x^5 - 1\right)G(x) = x - 1$$

$$\frac{\left(x^8 - 1\right)}{x-1}F(x) + \frac{\left(x^5 - 1\right)}{x-1}G(x) = 1$$

$$\left(x^7 + x^6 + ... + 1\right)F(x) + \left(x^4 + x^3 + ... + 1\right)G(x) = 1$$

Dengan pembagian Euclid kita peroleh:

$x^7 + x^6 + ... + 1 = x^3\left(x^4 + x^3 + ... + 1\right) + \left(x^2 + x + 1\right)$

$x^4 + x^3 + ... + 1 = x^2\left(x^2 + x + 1\right) + \left(x + 1\right)$

$x^2 + x + 1 = x(x+1) + 1$

Dengan bekerja terbalik diperoleh:

$1 = \left(x^2 + x + 1\right) - x\left(x+1\right)$

$1 = \left(x^2 + x + 1\right) - x\left\{\left(x^4 + x^3 + ... + 1\right) - x^2\left(x^2 + x + 1\right)\right\}$

$1 = \left(1 + x^3\right)\left(x^2 + x + 1\right) - x\left(x^4 + x^3 + ... + 1\right)$

$1 = \left(1 + x^3\right)\left[\left(x^7 + x^6 + ... + 1\right) - x^3\left(x^4 + x^3 + ... + 1\right)\right] - x\left(x^4 + x^3 + ... + 1\right)$

$1 = \left(1 + x^3\right)\left(x^7 + x^6 + ... + 1\right) - \left[x^3\left(1 + x^3\right) + x\right]\left(x^4 + x^3 + ... + 1\right)$

$1 = \left(1 + x^3\right)\left(x^7 + x^6 + ... + 1\right) + \left(-x^6 - x^3 - x\right)\left(x^4 + x^3 + ... + 1\right)$

Kita dapat menuliskannya sebagai berikut.

$\left(x^7 + x^6 + ... + 1\right)F(x) + \left(x^4 + x^3 + ... + 1\right)G(x) = \left(1 + x^3\right)\left(x^7 + x^6 + ... + 1\right) +$
$\left(-x^6 - x^3 - x\right)\left(x^4 + x^3 + ... + 1\right)$

Jadi, $F(x) = 1 + x^3$ dan $G(x) = -x^6 - x^3 - x$.

24. Buktikan bahwa $1 + x + x^2 + ... + x^{1023} = (1+x)\left(1+x^2\right)\left(1+x^4\right)...\left(1+x^{256}\right)\left(1+x^{512}\right)$

Bukti:

Ambillah $S = 1 + x + x^2 + ... + x^{1023}$, sehingga $xS = x + x^2 + x^3 + ... + x^{1024}$. Ini memberikan

$S - xS = 1 + x + x^2 + ... + x^{1023} - \left(x + x^2 + x^3 + ... + x^{1024}\right)$

$\left(1 - x\right)S = 1 - x^{1024}$

$S = \dfrac{1 - x^{1024}}{1 - x}$

$S = \left(\dfrac{1 - x^{1024}}{1 - x^{512}}\right)\left(\dfrac{1 - x^{512}}{1 - x^{256}}\right)...\left(\dfrac{1 - x^4}{1 - x^2}\right)\left(\dfrac{1 - x^2}{1 - x}\right)$

$S = \left(1 + x^{512}\right)\left(1 + x^{256}\right)...\left(1 + x^4\right)\left(1 + x^2\right)\left(1 + x\right)$

$1 + x + x^2 + ... + x^{1023} = \left(1+x\right)\left(1+x^2\right)\left(1+x^4\right)...\left(1+x^{256}\right)\left(1+x^{512}\right)$ (terbukti)

25. Tentukanlah bilangan real x sedemikian sehingga $x^3 + 3x^2 + 3x + 7 = 0$.

Solusi:

$x^3 + 3x^2 + 3x + 7 = 0$

$\left(x+1\right)^3 + 6 = 0$

$\left(x+1\right)^3 = -6$

$x + 1 = \sqrt[3]{-6}$

$x = -1 - \sqrt[3]{6}$

26. Jika x_1, x_2, x_3, dan x_4 adalah akar-akar persamaan $4x^4 - 3x^3 - x^2 + 2x - 6 = 0$. Berapakah nilai $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \dfrac{1}{x_3} + \dfrac{1}{x_4}$?

Solusi:

Teorema Vieta:

Jika x_1, x_2, x_3, dan x_4 adalah akar-akar persamaan $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$, maka

$$x_1+x_2+x_3+x_4=-\frac{b}{a}$$

$$x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4=\frac{c}{a}$$

$$x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4=-\frac{d}{a}$$

$$x_1x_2x_3x_4=\frac{e}{a}$$

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}=\frac{x_1x_2x_3+x_1x_3x_4+x_1x_2x_4+x_1x_2x_3}{x_1x_2x_3x_4}=\frac{-\frac{d}{a}}{\frac{e}{a}}=\frac{-\frac{2}{4}}{\frac{-6}{4}}=\frac{1}{3}$$

27. Hasil kali dua akar (dari empat akar) persamaan $x^4-18x^3+kx^2-200x-1984=0$ adalah -32. Tentukan nilai *k*.

Solusi:

Misalnya akar-akar persamaan $x^4-18x^3+kx^2-200x-1984=0$ adalah x_1, x_2, x_3, dan x_4, maka

$$x_1x_2=-32$$

$$x_1x_2x_3x_4=\frac{e}{a}=\frac{-1984}{1}=-1984$$

$$x_3x_4=\frac{x_1x_2x_3x_4}{x_1x_2}=\frac{-1984}{-32}=62$$

Sehingga untuk suatu bilangan *p* dan *q*:

$$x^4-18x^3+kx^2-200x-1984=\left(x^2-px-32\right)\left(x^2-qx+62\right)$$

$$=x^4-qx^3+62x^2-px^3+pqx^2-62px-32x^2+32qx-1984$$

$$=x^4-\left(p+q\right)x^3+\left(pq+30\right)x^2-\left(62p-32q\right)x-1984$$

$$p+q=18\Leftrightarrow p=18-q$$

$$pq+30=k$$

$$62p-32q=200$$

$$\begin{aligned} p=18-q\rightarrow\ & 62p-32q=200\\ & 62\left(18-q\right)-32q=200\\ & 1116-62q-32q=200\\ & -94q=-1316\\ & q=14 \end{aligned}$$

$$q=14\rightarrow\ p=18-q=18-14=4$$

$$\left.\begin{matrix} p=4\\ q=14 \end{matrix}\right\}\rightarrow pq+30=k\Leftrightarrow k=4\times 14+30=86$$

28. Tentukanlah semua nilai *p* yang memenuhi persamaan pangkat empat $x^4-(3p+2)x^2+p^2=0$ yang mempunyai empat akar real merupakan barisan aritmetika.

Solusi:

Misalnya akar-akar persamaan $x^4-(3p+2)x^2+p^2=0$ yang membentuk barisan aritmetika adalah $-3a$, $-a$, a, dan $3a$.

$x^4-(3p+2)x^2+p^2=(x+3a)(x+a)(x-a)(x+3a)=(x^2-a^2)(x^2-9a^2)=x^4-10a^2x^2+9a^4$

Dari kesamaan yang terakhir kita memperoleh sistem persamaan berikut ini.

$3p+2=10a^2$ .... (1)

$p^2=9a^4$ …. (2)

Dari persamaan (1) dan (2) kita memperoleh:

$$p^2=9\left(\frac{3p+2}{10}\right)^2$$

$$100p^2=9(9p^2+12p+4)$$

$$19p^2-108p-36=0$$

$$(19p+6)(p-6)=0$$

$p=\frac{-6}{19}$ atau $p=6$

29. Jika a, b, dan c adalah penyelesaian dari persamaan $x^3-ax^2+bx-c=0$ dan $a,b,c\neq 0$, tentukanlah nilai dari $a^3+b^3+c^3$.

Solusi:

$$\begin{aligned}
x=a \rightarrow\ & x^3-ax^2+bx-c=0\\
& a^3-a^3+ab-c=0\\
& ab-c=0\\
& c=ab\\
x=b \rightarrow\ & x^3-ax^2+bx-c=0\\
& b^3-ab^2+b^2-c=0\\
& b^3-ab^2+b^2-ab=0\\
& b^2-ab+b-a=0\\
& b(b-a)+(b-a)=0\\
& (b+1)(b-a)=0\\
& b=-1 \text{ atau } a=b\\
& b=-1 \text{ atau } a=b=-1
\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}a=-1\\ b=-1\end{aligned}\right\}\rightarrow c=ab=(-1)(-1)=1$$

$$\therefore\ a^3+b^3+c^3=(-1)^3+(-1)^3+1^3=-1-1+1=-1$$

30. Persamaan $4x^3+7x^2-5x-1=0$ memiliki akar-akar α, β, dan γ. Susunlah persamaan kuadarat baru yang akar-akarnya $(\alpha+1)$, $(\beta+1)$, dan $(\gamma+1)$.

Solusi 1:

Persamaan kubik $ax^3+bx^2+cx+d=0$ atau $x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a}=0$ yang akar-akarnya α, β, dan γ adalah

$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=0$$

$$\left[x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\right](x-\gamma)=0$$

$$x^3 - \gamma x^2 - (\alpha+\beta)x^2 + (\alpha\gamma+\beta\gamma)x + \alpha\beta x - \alpha\beta\gamma = 0$$

$x^3 - (\alpha+\beta+\gamma)x^2 + (\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)x - \alpha\beta\gamma = 0$, dengan

$\alpha+\beta+\gamma = -\frac{b}{a}$, $\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma = \frac{c}{a}$, dan $\alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}$

$$4x^3 + 7x^2 - 5x - 1 = 0$$

$\alpha+\beta+\gamma = -\frac{7}{4}$, $\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma = -\frac{5}{4}$, dan $\alpha\beta\gamma = \frac{1}{4}$

Akar-akar persamaan yang diminta adalah $(\alpha+1)$, $(\beta+1)$, dan $(\gamma+1)$, sehingga

$$\alpha+1+\beta+1+\gamma+1 = \alpha+\beta+\gamma+3 = -\frac{7}{4}+3 = \frac{5}{4}$$

$$(\alpha+1)(\beta+1)+(\alpha+1)(\gamma+1)+(\beta+1)(\gamma+1) = \alpha\beta+\alpha+\beta+1+\alpha\gamma+\alpha+\gamma+1+\beta\gamma+\beta+\gamma+1$$

$$= \alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma+2(\alpha+\beta+\gamma)+3 = -\frac{5}{4}+2\left(-\frac{7}{4}\right)+3 = -\frac{7}{4}$$

$$(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1) = [\alpha\beta+(\alpha+\beta)+1](\gamma+1) = \alpha\beta\gamma+\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma+\alpha+\beta+\gamma+1$$

$$= \frac{1}{4}-\frac{7}{4}-\frac{5}{4}+1 = -\frac{7}{4}$$

Jadi, persamaannya adalah $x^3 - \frac{5}{4}x^2 - \frac{7}{4}x + \frac{7}{4} = 0$ atau $4x^3 - 5x^2 - 7x + 7 = 0$

Solusi 2:

Karena akar-akar persamaannya $(\alpha+1)$, $(\beta+1)$, dan $(\gamma+1)$ adalah simetri (setangkup), maka persamaannya adalah

$$\alpha = x-1 \rightarrow 4x^3 + 7x^2 - 5x - 1 = 0$$

$$4(x-1)^3 + 7(x-1)^2 - 5(x-1) - 1 = 0$$

$$4(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) + 7(x^2 - 2x + 1) - 5x + 5 - 1 = 0$$

$$4x^3 - 12x^2 + 12x - 4 + 7x^2 - 14x + 7 - 5x + 5 - 1 = 0$$

$$4x^3 - 5x^2 - 7x + 7 = 0$$