

# Solusi Pengayaan Matematika

## Edisi 3

### Nomor Soal: 21-30

21. Melalui  $(0, 0)$  buatlah garis-garis yang memotong lingkaran  $x^2 + y^2 + 4x = 0$  pada dua titik. Carilah tempat kedudukan pertengahan ke dua titik.

**Solusi:**

Persamaan garis melalui  $(0, 0)$  adalah  $y = mx$ .

Titik potong dengan lingkaran adalah:

$$x^2 + m^2x^2 + 4x = 0$$

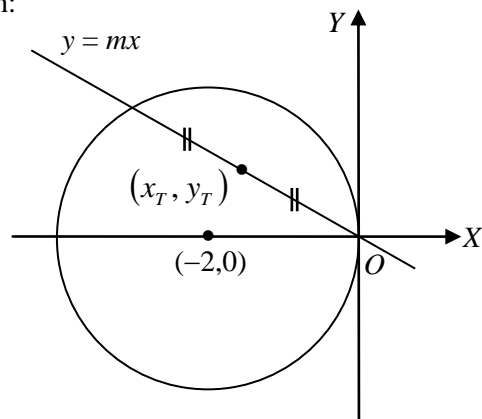
$$x(x + m^2x + 4) = 0$$

$$x_1 = 0 \text{ atau } x_2 = -\frac{4}{1+m^2}$$

$$\text{Titik tengah } x_T = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$$

$$x_T = \frac{1}{2}\left(0 - \frac{4}{1+m^2}\right)$$

$$x_T = -\frac{2}{1+m^2}$$



Karena titik tengah terletak pada garis  $y = mx$ , berarti  $m = \frac{y_T}{x_T}$ .

Tempat kedudukan yang diminta adalah

$$m = \frac{y_T}{x_T} \rightarrow x_T = -\frac{2}{1+m^2}$$

$$x_T = -\frac{2}{1+\left(\frac{y_T}{x_T}\right)^2}$$

$$x_T + \frac{y_T^2}{x_T} = -2$$

$$x_T^2 + y_T^2 = -2x_T$$

$$x_T^2 + y_T^2 + 2x_T = 0$$

Dengan menghilangkan indeksnya, maka diperoleh persamaan  $x^2 + y^2 + 2x = 0$  yang merupakan tempat kedudukan pertengahan ke dua titik.

22. Tentukan tempat kedudukan semua titik  $P(x, y)$  yang jaraknya sama terhadap titik-titik  $A(3, 2)$  dan  $B(-1, 4)$ .

**Solusi:**

$$|AP| = |BP|$$

$$\sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x+1)^2 + (y-4)^2}$$

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 = (x+1)^2 + (y-4)^2$$

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = x^2 + 2x + 1 + y^2 - 8y + 16$$

$$-8x + 4y - 4 = 0$$

$$2x - y + 1 = 0$$

Jadi, tempat kedudukan yang diminta adalah  $2x - y + 1 = 0$ .

23. Tentukan tempat kedudukan titik  $P(x, y)$  yang jaraknya dari titik  $A(4, 0)$  sama dengan jaraknya ke sumbu  $Y$ .

**Solusi:**

$$|AP| = |BP|$$

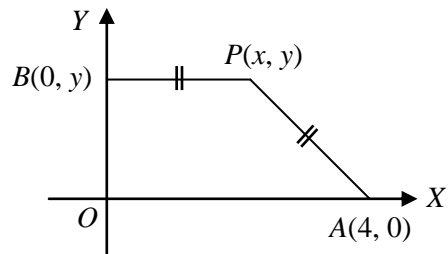
$$\sqrt{(x-4)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-0)^2 + (y-y)^2}$$

$$(x-4)^2 + y^2 = x^2 + 0$$

$$x^2 - 8x + 16 + y^2 = x^2$$

$$y^2 = 8x - 16$$

$\therefore$  tempat kedudukannya adalah  $y^2 = 8x - 16$  (parabola).



24. Tentukanlah pusat lingkaran luar segitiga yang persamaan sisi-sisinya adalah  $4x - 3y + 30 = 0$ ,  $x + y = 10$ , dan  $4x + 25y + 86 = 0$ .

**Solusi:**

$$x + y = 10 \Leftrightarrow y = 10 - x$$

$$y = 10 - x \rightarrow 4x + 25y + 86 = 0$$

$$4x + 25(10 - x) + 86 = 0$$

$$4x + 250 - 25x + 86 = 0$$

$$-21x = -336$$

$$x = 16$$

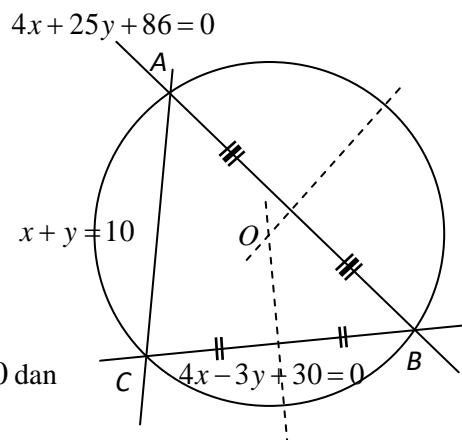
$$x = 16 \rightarrow y = 10 - x = 10 - 16 = -6$$

Koordinat titik potong garis  $x + y = 10$  dan

$4x + 25y + 86 = 0$  adalah  $A(16, -6)$ .

$$4x + 25y + 86 = 0 \Leftrightarrow 4x = -25y - 86$$

$$4x = -25y - 86 \rightarrow 4x - 3y + 30 = 0$$



$$-25y - 86 - 3y + 30 = 0$$

$$-28y = 56$$

$$y = -2$$

$$y = -2 \rightarrow 4x = -25y - 86 = -25(-2) - 86 = -36$$

$$x = -9$$

Koodinat titik potong garis  $4x + 25y + 86 = 0$  dan  $4x - 3y + 30 = 0$  adalah  $B(-9, -2)$ .

$$x + y = 10 \Leftrightarrow y = 10 - x$$

$$y = 10 - x \rightarrow 4x - 3y + 30 = 0$$

$$4x - 3(10 - x) + 30 = 0$$

$$4x - 30 + 3x + 30 = 0$$

$$7x = 0$$

$$x = 0$$

$$x = 0 \rightarrow y = 10 - x = 10 - 0 = 10$$

Koodinat titik potong garis  $x + y = 10$  dan  $4x - 3y + 30 = 0$  adalah  $C(0, 10)$ .

Koordinat titik tengah garis  $BC$  adalah  $D\left(\frac{-9+0}{2}, \frac{-2+10}{2}\right) = D\left(\frac{-9}{2}, 4\right)$ .

Koordinat titik tengah garis  $AB$  adalah  $E\left(\frac{16-9}{2}, \frac{-6-2}{2}\right) = E\left(\frac{7}{2}, -4\right)$ .

Gradien garis  $BC \equiv 4x - 3y + 10 = 0$  adalah  $m_{BC} = \frac{4}{3}$  dan gradien garis sumbunya  $m_s$  yang melalui titik  $D$  tegak lurus pada garis  $BC$ , maka diperoleh hubungan:

$$m_s \times m_{BC} = -1$$

$$m_s \times \frac{4}{3} = -1$$

$$m_s = -\frac{3}{4}$$

Persamaan garis sumbu pada sisi  $BC$  adalah

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 4 = -\frac{3}{4}\left(x + \frac{9}{2}\right)$$

$$y = -\frac{3}{4}\left(x + \frac{9}{2}\right) + 4 \dots (1)$$

Gradien garis  $AB \equiv 4x + 25y + 86 = 0$  adalah  $m_{AB} = -\frac{4}{25}$  dan gradien garis sumbunya  $m_s$  yang melalui titik  $D$  tegak lurus pada garis  $AB$ , maka diperoleh hubungan:

$$m_s \times m_{AB} = -1$$

$$m_s \times \left(-\frac{4}{25}\right) = -1$$

$$m_s = \frac{25}{4}$$

Persamaan garis sumbu pada sisi  $AB$  adalah

$$y + 4 = \frac{25}{4} \left(x - \frac{7}{2}\right) \dots (2)$$

Dari persamaan (1) dan (2) kita memperoleh:

$$-\frac{3}{4} \left(x + \frac{9}{2}\right) + 4 + 4 = \frac{25}{4} \left(x - \frac{7}{2}\right)$$

$$-3x - \frac{27}{2} + 32 = 25x - \frac{175}{2}$$

$$28x = -\frac{27}{2} + 32 + \frac{175}{2}$$

$$28x = 32 + \frac{148}{2}$$

$$28x = 32 + 74$$

$$x = \frac{106}{28} = \frac{53}{14}$$

$$x = \frac{53}{14} \rightarrow y = -\frac{3}{4} \left(x + \frac{9}{2}\right) + 4 = -\frac{3}{4} \left(\frac{53}{14} + \frac{9}{2}\right) + 4 = -\frac{87}{14} + 4 = -\frac{31}{14}$$

Koordinat titik potong garis  $y - 4 = -\frac{3}{4} \left(x + \frac{9}{2}\right)$  dan  $y + 4 = \frac{25}{4} \left(x - \frac{7}{2}\right)$  adalah

$O\left(\frac{53}{14}, -\frac{31}{14}\right)$  yang menunjukkan pusat lingkaran luar segitiga itu.

25. Persamaan lingkaran yang melalui titik-titik  $A(4, 2)$ ;  $B(1, 3)$ ; dan  $C(-3, -5)$  adalah ....

**Solusi:**

Misalnya persamaan lingkaran adalah  $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$ , maka dengan mensubstitusikan ke titik itu, kita memperoleh sistem persamaan sebagai berikut.

$$\begin{cases} 16+4+8a+4b+c=0 \\ 1+9+2a+6b+c=0 \\ 9+25-6a-10b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8a+4b+c=-20\dots(1) \\ 2a+6b+c=-10\dots(2) \\ 6a+10b-c=34\dots(3) \end{cases}$$

$$(1) - (2): 6a - 2b = -10 \dots (4)$$

$$(2) + (3): 8a + 16b = 24$$

$$a + 2b = 3 \dots (5)$$

$$(4) + (5): 7a = -7$$

$$a = -1$$

$$a = -1 \rightarrow a + 2b = 3$$

$$-1 + 2b = 3$$

$$2b = 4$$

$$b = 2$$

$$\left. \begin{array}{l} a = -1 \\ b = 2 \end{array} \right\} \rightarrow 8a + 4b + c = -20$$

$$8(-1) + 4 \cdot 2 + c = -20$$

$$-8 + 8 + c = -20$$

$$c = -20$$

Jadi, persamaan lingkaran yang diminta adalah  $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$ .

26. Tentukan persamaan lingkaran yang melalui titik-titik potong kedua lingkaran  $x^2 + y^2 + 4x - 4y - 17 = 0$  dan  $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 45 = 0$  dan yang melalui titik pusat  $O$ .

**Solusi:**

$$x^2 + y^2 + 4x - 4y - 17 = 0 \dots (1)$$

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 45 = 0 \dots (2)$$

Persamaan (1) – persamaan (2) menghasilkan:

$$8x - 6y + 28 = 0$$

$$y = \frac{4x+14}{3}$$

$$y = \frac{4x+14}{3} \rightarrow x^2 + y^2 + 4x - 4y - 17 = 0$$

$$x^2 + \left(\frac{4x+14}{3}\right)^2 + 4x - 4\left(\frac{4x+14}{3}\right) - 17 = 0$$

$$x^2 + \frac{16x^2 + 112x + 196}{9} + 4x - \frac{16x + 56}{3} - 17 = 0$$

$$9x^2 + 16x^2 + 112x + 196 + 36x - 48x - 168 - 153 = 0$$

$$25x^2 + 100x - 125 = 0$$

$$\begin{aligned}
 x^2 + 4x - 5 &= 0 \\
 (x-1)(x+5) &= 0 \\
 x &= 1 \text{ atau } x = -5 \\
 y &= 6 \text{ atau } y = -2
 \end{aligned}$$

Titik-titik potongnya adalah (1,6) dan (-5,-2)

Misalnya persamaan lingkaran adalah  $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$ , maka dengan mensubstitusikan ke titik itu, kita memperoleh sistem persamaan sebagai berikut.

$$0 + 0 + 0 + 0 + c = 0$$

$$c = 0$$

Persamaan lingkarannya menjadi  $x^2 + y^2 + 2ax + 2by = 0$ ,

$$\begin{cases}
 1 + 36 + 2a + 12b = 0 \\
 25 + 4 - 10a - 4b = 0
 \end{cases}$$

$$\begin{cases}
 2a + 12b = -37 \dots (1) \\
 10a + 4b = 29 \dots (2)
 \end{cases}$$

Persamaan (1)  $- 3 \times$  Persamaan (2) menghasilkan

$$-28a = -124$$

$$a = \frac{124}{28}$$

$$a = \frac{124}{28} \rightarrow 2\left(\frac{124}{28}\right) + 12b = -37$$

$$12b = -37 - \frac{248}{28} = -\frac{1284}{28}$$

Jadi, persamaan lingkaran yang diminta adalah  $x^2 + y^2 + 2 \cdot \frac{124}{28}x - 2 \cdot \frac{107}{28}y = 0$

atau  $14x^2 + 14y^2 + 124x - 107y = 0$

27. Garis  $3x + 4y = 25$  menyinggung lingkaran  $x^2 + y^2 = 25$  di titik  $(a, b)$ . Nilai dari  $a + b = \dots$

**Solusi:**

$$3x + 4y = 25$$

$$y = \frac{-3x + 25}{4}$$

$$y = \frac{-3x + 25}{4} \rightarrow x^2 + y^2 = 25$$

$$x^2 + \left(\frac{-3x + 25}{4}\right)^2 = 25$$

$$x^2 + \frac{9x^2 - 150x + 625}{16} = 25$$

$$16x^2 + 9x^2 - 150x + 625 = 16 \cdot 25$$

$$25x^2 - 150x + 625 = 16 \cdot 25$$

$$x^2 - 6x + 25 = 16$$

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$(x-3)^2 = 0$$

$$x = 3$$

$$x = 3 \rightarrow y = \frac{-3 \cdot 3 + 25}{4} = 4$$

Sehingga titik singgung  $(a, b) = (3, 4)$ , berarti  $a = 3$  dan  $b = 4$ .

Jadi,  $a + b = 3 + 4 = 7$ .

28. Jumlah kuadrat dua bilangan adalah 221. Jika setiap bilangan bertambah 1 sehingga jumlah kuadratnya adalah 265. Tentukan bilangan-bilangan tersebut.

**Solusi:**

Misalnya bilangan-bilangan tersebut adalah  $x$  dan  $y$ .

$$x^2 + y^2 = 221 \dots (1)$$

$$(x+1)^2 + (y+1)^2 = 265 \dots (2)$$

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 = 265$$

$$x^2 + y^2 + 2x + 2y = 263$$

$$221 + 2x + 2y = 263$$

$$2x + 2y = 42$$

$$y = 21 - x \dots (3)$$

Dari persamaan (1) dan (3) diperoleh

$$x^2 + (21-x)^2 = 221$$

$$x^2 + 441 - 42x + x^2 = 221$$

$$2x^2 - 42x + 220 = 0$$

$$x^2 - 21x + 110 = 0$$

$$(x-10)(x-11) = 0$$

$$x = 10 \vee x = 11$$

$$y = 11 \vee y = 10$$

Jadi, bilangan-bilangan tersebut adalah 10 dan 11.

29. Panjang hipotenusa suatu segitiga siku-siku adalah 82 cm dan luasnya  $720 \text{ cm}^2$ . Tentukan kaki-kaki segitiga tersebut.

**Solusi:**

$$\text{Luas} = 720$$

$$\frac{1}{2}xy = 720$$

$$xy = 1440$$

$$x^2 + y^2 = 82^2$$

$$(x + y)^2 - 2xy = 82^2$$

$$(x + y)^2 - 2 \cdot 1440 = 6724$$

$$(x + y)^2 = 9604$$

$$x + y = 98$$

$$y = 98 - x$$

$$y = 98 - x \rightarrow xy = 1440$$

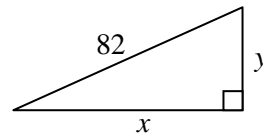
$$x(98 - x) = 1440$$

$$x^2 - 98x + 1440 = 0$$

$$(x - 80)(x - 18) = 0$$

$$x = 80 \text{ atau } x = 18$$

$$y = 18 \text{ atau } y = 80$$



Jadi, panjang kaki-kaki segitiga siku-siku tersebut adalah 80 cm dan 18 cm.

30. Keliling segitiga siku-siku adalah 72 cm dan luasnya  $216 \text{ cm}^2$ . Tentukan sisi-sisi segitiga tersebut.

**Solusi:**

$$\text{Keliling} = 72$$

$$x + y + z = 72$$

$$x + y = 72 - z$$

$$x^2 + y^2 + 2xy = 5184 - 144z + z^2 \dots (1)$$

$$\text{Luas} = 216$$

$$\frac{1}{2}xy = 216$$

$$xy = 432 \dots (2)$$

$$x^2 + y^2 = z^2 \dots (3)$$

Dari (1), (2), dan (3) diperoleh

$$z^2 + 2 \cdot 432 = 5184 - 144z + z^2$$

$$144z = 4320$$

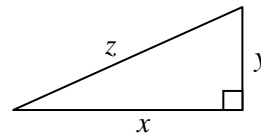
$$z = 30$$

$$z = 30 \rightarrow x + y = 72 - 30 = 42$$

$$y = 42 - x \dots (4)$$

Dari (2) dan (4) diperoleh

$$x(42 - x) = 432$$





$$x^2 - 42x + 432 = 0$$

$$(x - 18)(x - 24) = 0$$

$$x = 18 \text{ atau } x = 24$$

$$y = 24 \text{ atau } y = 18$$

∴ panjang sisi-sisi segitiga siku-siku tersebut adalah 18 cm, 24 cm, dan 30 cm.