

# Solusi Pengayaan Matematika

## Edisi 3

### Nomor Soal: 21-30

21. Garis  $12x + 5y = 60$  memotong sumbu  $X$  dan sumbu  $Y$  masing-masing di titik  $A$  dan  $B$ , sehingga  $OAB$  membentuk segitiga siku-siku. Sebuah lingkaran  $L$  dibuat sedemikian, sehingga menyinggung sumbu  $X$ , sumbu  $Y$ , dan garis tersebut. Tentukanlah luas daerah di luar lingkaran dan di dalam segitiga.

- A.  $34\pi$       B.  $30\pi$       C.  $26\pi$       D.  $30 + 4\pi$       E.  $30 - 4\pi$

**Solusi: [E]**

Menurut Pythagoras:

$$AB = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$$

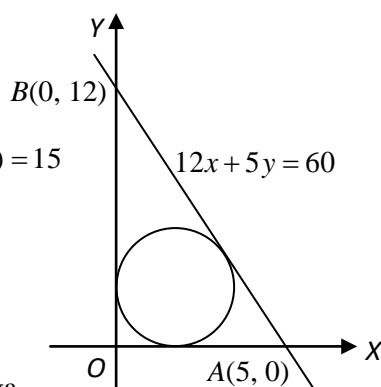
Setengah keliling  $\triangle OAB$  adalah  $s = \frac{1}{2}(5 + 12 + 13) = 15$

Luas  $\triangle OAB$  adalah  $L = [OAB] = \frac{1}{2} \times 5 \times 12 = 30$

Jari-jari lingkaran dalam adalah  $r = \frac{L}{s} = \frac{30}{15} = 2$

Luas daerah di luar lingkaran dan di dalam segitiga  
= luas segitiga – luas lingkaran

$$= \frac{1}{2} \times 5 \times 12 - \pi(2)^2 = 30 - 4\pi$$



22. Tentukan titik potong persamaan garis singgung pada lingkaran  $x^2 + y^2 - 12x + 8y + 7 = 0$  di titik  $(3,2)$  dengan sumbu  $X$ .

- A.  $(-1,0)$       B.  $(-2,0)$       C.  $(-3,0)$       D.  $(1,0)$       E.  $(1,0)$

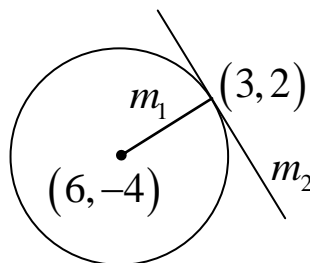
**Solusi: [A]**

$$x^2 - 12x + 36 + y^2 + 8y + 16 = -7 + 36 + 16$$

$$(x - 6)^2 + (y + 4)^2 = 45$$

Pusat lingkaran  $(6, -4)$

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{\frac{2+4}{3-6}} = \frac{1}{2}$$



Persamaan garis singgungnya adalah  $y - 2 = \frac{1}{2}(x - 3) \Leftrightarrow x - 2y = -1$

$$y = 0 \rightarrow x - 2 \cdot 0 = -1 \Leftrightarrow x = -1$$

Koordinat titik potongnya adalah  $(-1, 0)$ .

23. Jarak terdekat antara lingkaran-lingkaran  $x^2 + y^2 + 6x - 2y - 15 = 0$  dan  $x^2 + y^2 - 10x + 10y + 41 = 0$  adalah ....  
 A. 5                      B. 4                      C. 3                      D. 2                      E. 1

**Solusi: [D]**

$$x^2 + y^2 + 6x - 2y - 15 = 0 \Leftrightarrow (x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 25$$

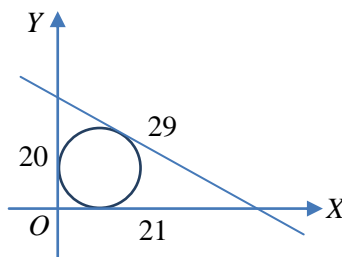
$$x^2 + y^2 - 10x + 10y + 41 = 0 \Leftrightarrow (x - 5)^2 + (y + 5)^2 = 9$$

Jarak kedua pusat lingkaran adalah  $\sqrt{(-3 - 5)^2 + (1 + 5)^2} = 10$ .

Kurangkan dua jari-jari diperoleh  $10 - 8 = 2$

24. Persamaan lingkaran yang menyingung garis  $y = 0$ ,  $x = 0$ , dan  $15y + 8x = 120$  adalah ....  
 A.  $x^2 - 4x + y^2 - 4y + 4 = 0$                       D.  $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 16 = 0$   
 B.  $x^2 + y^2 = 9$     E.  $x^2 + y^2 = 9$   
 C.  $x^2 + y^2 - 12x - 12y + 9 = 0$

**Solusi: [C]**



Garis  $20y + 21x = 420$  memotong sumbu  $X$  dan sumbu  $Y$  di  $(21, 0)$  dan  $(0, 20)$ .

Panjang sisi miringnya adalah  $\sqrt{21^2 + 20^2} = \sqrt{841} = 29$ .

Setengah keliling segitiga adalah  $s = \frac{1}{2}(20 + 21 + 29) = 35$ .

Luas segitiga adalah  $L = \frac{1}{2} \cdot 21 \cdot 20 = 210$ .

Jari-jari lingkaran dalamnya adalah  $r = \frac{L}{s} = \frac{210}{35} = 6$ .

Sehingga pusat lingkaran adalah  $(6, 6)$ .

Jadi, persamaan lingkarannya adalah  $(x - 6)^2 + (y - 6)^2 = 36$ , yang disederhanakan menjadi  $x^2 + y^2 - 12x - 12y + 36 = 0$

25. Persamaan lingkaran melalui titik-titik  $(-2, 2)$ ,  $(4, 2)$ , dan  $(2, -2)$  dinyatakan sebagai  $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ . Tentukan nilai dari  $(abc)^2$ .

- A. 1.024      B. 512      C. 256      D. 128      E. 64

**Solusi: [A]**

$$(-2, 2) \rightarrow (-2)^2 + 2^2 + a(-2) + b \cdot 2 + c = 0 \Leftrightarrow -2a + 2b + c = -8 \dots (1)$$

$$(4, 2) \rightarrow 4^2 + 2^2 + a \cdot 4 + b \cdot 2 + c = 0 \Leftrightarrow 4a + 2b + c = -20 \dots (2)$$

$$(2, -2) \rightarrow 2^2 + (-2)^2 + a \cdot 2 + b(-2) + c = 0 \Leftrightarrow 2a - 2b + c = -8 \dots (3)$$

Persamaan (2) – persamaan (1) menghasilkan  $6a = -12 \Leftrightarrow a = -2$

Persamaan (2) – persamaan (3) menghasilkan  $2a + 4b = -12$

$$a = -2 \rightarrow 2(-2) + 4b = -12 \Leftrightarrow b = -2$$

$$a = -2, b = -2 \rightarrow -2(-2) + 2(-2) + c = -8 \Leftrightarrow c = -8$$

$$\text{Jadi, nilai dari } (abc)^2 = [(-2)(-2)(-8)]^2 = (-32)^2 = 1.024$$

26. Diberikan dua buah lingkaran.

$$\text{Lingkaran I: } (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$$

$$\text{Lingkaran II: } (x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 16$$

Persamaan tali busur dari persekutuan dua lingkaran adalah  $ax + by = c$ .

Tentukan  $(a + b + c)^2$ .

- A. 16      B. 9      C. 4      D. 1      E. 0

**Solusi: [C]**

Titik-titik pada kedua lingkaran harus memenuhi suatu persamaan.

Pengurangan kedua persamaan memberikan:

$$(x^2 + 6x + 9 + y^2 - 2y + 1) - (x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4) = 16 - 9$$

$$8x - 6y = 2$$

$$4x - 3y = 1$$

Persamaan tali busurnya adalah  $4x - 3y = 1$ .

$$\text{Karena } a = 4, b = -3, \text{ dan } c = 1, \text{ maka } (a + b + c)^2 = (4 - 3 + 1)^2 = 4$$

27. Carilah persamaan lingkaran yang pusatnya di  $(-3, -5)$  dan menyinggung garis

$12x + 5y - 4 = 0$  adalah  $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ . Nilai dari  $a + b + c = \dots$

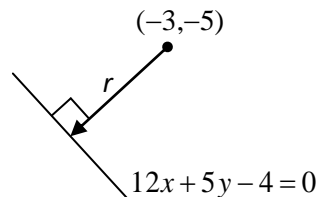
- A. 6      B. 9      C. 15      D. 25      E. 65

**Solusi: [D]**

Jarak titik  $(-3, -5)$  ke garis  $12x + 5y - 4 = 0$  adalah jari-jari lingkaran( $r$ ):

$$r = \frac{|12(-3) + 5(-5) - 4|}{\sqrt{12^2 + 5^2}} = \frac{|-65|}{\sqrt{169}} = \frac{65}{13} = 5$$

Persamaan lingkaran yang diminta adalah



$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

$$(x+3)^2 + (y+5)^2 = 5^2$$

$$x^2 + 6x + 9 + y^2 + 10y + 25 = 25$$

$$x^2 + y^2 + 6x + 10y + 9 = 0$$

Karenanya  $a=6, b=10$ , dan  $c=9$ , sehingga  $a+b+c=6+10+9=25$ .

28. Persamaan lingkaran yang menyinggung garis  $3x + y + 2 = 0$  di titik  $(-1, 1)$  dan melalui titik  $(3, 5)$  adalah  $x^2 + y^2 + ay + by + c = 0$ . Nilai dari  $abc$  adalah ....

- A. -32      B. -22      C. 34      D. 24      E. 14

**Solusi: [A]**

Lingkaran menyinggung garis  $3x + y + 2 = 0$  di titik  $(-1, 1)$  dan melalui titik  $(3, 5)$ , sehingga

$$(3-a)^2 + (5-b)^2 = (-1-a)^2 + (1-b)^2$$

$$9 - 6a + a^2 + 25 - 10b + b^2 = 1 + 2a + a^2 + 1 - 2b + b^2$$

$$-8a - 8b + 32 = 0$$

$$a + b - 4 = 0$$

$$b = 4 - a \dots (1)$$

Gradien garis  $3x + y + 2 = 0$  adalah  $m_1 = -3$ .

Gradien garis yang melalui titik  $(a, b)$  dan  $(-1, 1)$  adalah

$$m_2 = \frac{1-b}{-1-a} = \frac{b-1}{a+1}$$

$$m_1 \times m_2 = -1$$

$$-3 \times \frac{b-1}{a+1} = -1$$

$$3b - 3 = a + 1 \dots (2)$$

Dari persamaan (1) dan (2) kita memperoleh:

$$3(4-a) - 3 = a + 1$$

$$12 - 3a - 3 = a + 1$$

$$4a = 8$$

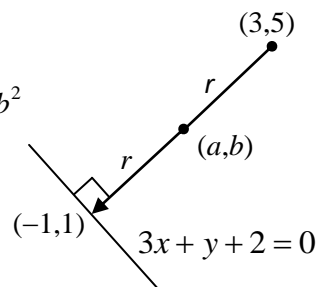
$$a = 2$$

$$a = 2 \rightarrow b = 4 - a = 4 - 2 = 2$$

Pusat lingkaran adalah  $(2, 2)$ .

$$\text{Jari-jari lingkaran adalah } r = \left| \frac{3 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 2}{\sqrt{3^2 + 1^2}} \right| = \left| \frac{10}{\sqrt{10}} \right| = \sqrt{10}$$

Persamaan lingkaran yang diminta adalah



$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 = (\sqrt{10})^2$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 = 10$$

$$x^2 + y^2 - 4x - 4y - 2 = 0$$

Karenanya  $a = -4, b = -4, \text{ dan } c = -2$ , sehingga  $abc = (-4)(-4)(-2) = -32$ .

29. Tentukan jarak pusat dari kedua lingkaran kemudian hitung rasio luasnya

$$L_1 \equiv 3x^2 + 3y^2 + 4y - 7 = 0 \text{ dan } L_2 \equiv x^2 + y^2 - 10x - 10y + 25 = 0.$$

- A. 1 : 2      B. 1 : 3      C. 1 : 6      D. 1 : 8      E. 1 : 9

**Solusi: [E]**

$$L_1 \equiv 3x^2 + 3y^2 + 4y - 7 = 0$$

$$L_1 \equiv x^2 + y^2 + \frac{4}{3}y - \frac{7}{3} = 0$$

$$L_1 \equiv x^2 + \left(x + \frac{4}{6}\right)^2 = \frac{7}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{7}{3} + \frac{4}{9} = \frac{25}{9}$$

$$L_1 \equiv x^2 + \left(x + \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{25}{9}$$

Pusat lingkaran  $L_1$  adalah  $\left(0, -\frac{2}{3}\right)$  dan jari-jarinya adalah  $r = \sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{5}{3}$

$$L_2 \equiv x^2 + y^2 - 10x - 10y + 25 = 0$$

$$L_2 \equiv (x-5)^2 + (y-5)^2 = -25 + 25 + 25$$

$$L_2 \equiv (x-5)^2 + (y-5)^2 = 25$$

Pusat lingkaran  $L_2$  adalah  $(5,5)$  dan jari-jarinya adalah  $r = \sqrt{25} = 5$

Jarak pusat lingkaran  $L_1$  ke lingkaran  $L_2$  adalah

$$L_1L_2 = \sqrt{(5-0)^2 + \left(5 + \frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{25 + \frac{289}{9}} = \sqrt{\frac{514}{9}} = \frac{1}{3}\sqrt{514}$$

Luas lingkaran  $L_1$  : Luas lingkaran  $L_2 = \pi\left(\frac{5}{3}\right)^2 : \pi(5)^2 = \frac{25}{9} : 25 = 1 : 9$

30. Persamaan garis singgung lingkaran  $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$  di titik  $(5,1)$  adalah ....

- A.  $3x + 4y - 19 = 0$       C.  $4x + 3y - 23 = 0$       E.  $3x - 4y - 19 = 0$   
 B.  $3x - 4y + 8 = 0$       D.  $3x + 4y - 9 = 0$

**Solusi 1: [A]**

Jelaslah bahwa titik  $(5,1)$  terletak pada lingkaran  $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$ , karena:  $5^2 + 1^2 - 4 \times 5 + 6 \times 1 - 12 = 0$  adalah pernyataan yang bernilai benar.

Persamaan garis singgungnya pada lingkaran  $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$  di titik  $(x_1, y_1)$  adalah  $x_1x + y_1y + a(x + x_1) + b(y + y_1) + c = 0$

$$5 \cdot x + 1 \cdot y + (-2)(x + 5) + (3)(y + 1) - 12 = 0$$

$$5x + y - 2x - 10 + 3y + 3 - 12 = 0$$

$$3x + 4y - 19 = 0,$$

**Solusi 2: [A]**

Persamaan lingkaran dengan titik pusat  $(5,1)$  adalah

$$(x - 5)^2 + (y - 1)^2 = 0$$

$$x^2 - 10x + 25 + y^2 - 2y + 1 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 10x - 2y + 26 = 0$$

Persamaan garis singgung melalui titik  $(5, 1)$  pada lingkaran pertama adalah:

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = x^2 + y^2 - 10x - 2y + 26$$

$$6x + 8y - 38 = 0$$

$$3x + 4y - 19 = 0$$