

# Solusi Pengayaan Matematika

## Edisi 2

### Nomor Soal: 11-20

11. Diberikan bahwa  $x + \frac{1}{x} = 3$ , berapakah nilai dari  $x^7 + \frac{1}{x^7}$ ?

**Solusi:**

$$x + \frac{1}{x} = 3$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 9$$

$$x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = 9$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = 7$$

Diberikan  $a_n = x^n + \frac{1}{x^n}$ , maka  $a_1 = x + \frac{1}{x} = 3$ ,  $a_2 = x^2 + \frac{1}{x^2} = 7$ , dan

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^n + \frac{1}{x^n}\right) = x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}} + x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}$$

$$3a_n = a_{n+1} + a_{n-1}$$

$$a_{n+1} = 3a_n - a_{n-1}$$

Dengan demikian,

$$a_3 = 3a_2 - a_1 = 3 \times 7 - 3 = 18$$

$$a_4 = 3a_3 - a_2 = 3 \times 18 - 7 = 47$$

$$a_5 = 3a_4 - a_3 = 3 \times 47 - 18 = 123$$

$$a_6 = 3a_5 - a_4 = 3 \times 123 - 47 = 322$$

$$a_7 = 3a_6 - a_5 = 3 \times 322 - 123 = 843$$

Jadi, nilai dari  $x^7 + \frac{1}{x^7}$  adalah 843.

12. Carilah himpunan penyelesaian dari persamaan  $6\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 25\left(x - \frac{1}{x}\right)$ .

**Solusi:**

$$6\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 25\left(x - \frac{1}{x}\right)$$

$$6\left(x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}\right) = 25\left(x - \frac{1}{x}\right)$$

$$6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 12 = 25\left(x - \frac{1}{x}\right)$$

$$6\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 24 = 25\left(x - \frac{1}{x}\right)$$

Misalnya  $y = \left(x - \frac{1}{x}\right)$ , sehingga

$$6y^2 + 24 = 25y$$

$$6y^2 - 25y + 24 = 0$$

$$6y^2 - 16y - 9y + 24 = 0$$

$$2y(3y - 8) - 3(3y - 8) = 0$$

$$(3y - 8)(2y - 3) = 0$$

$$y = \frac{8}{3} \text{ atau } y = \frac{3}{2}$$

$$x - \frac{1}{x} = \frac{8}{3} \text{ atau } x - \frac{1}{x} = \frac{3}{2}$$

$$3x^2 - 8x - 3 = 0 \text{ atau } 2x^2 - 3x - 2 = 0$$

$$(3x + 1)(x - 3) = 0 \text{ atau } (2x + 1)(x - 2) = 0$$

$$x = -\frac{1}{3}, x = 3, x = -\frac{1}{2}, \text{ atau } x = 2$$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah  $\left\{-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, 2, 3\right\}$ .

13. Selesaikanlah persamaan  $x^4 - 14x^3 + 50x^2 - 14x + 1 = 0$ .

**Solusi:**

$$x^4 - 14x^3 + 50x^2 - 14x + 1 = 0$$

$$x^2 - 14x + 50 - \frac{14}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} - 14x - \frac{14}{x} + 48 = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 14\left(x + \frac{1}{x}\right) + 48 = 0$$

$$\left[\left(x + \frac{1}{x}\right) - 6\right]\left[\left(x + \frac{1}{x}\right) - 8\right] = 0$$

$$(x^2 - 6x + 1)(x^2 - 8x + 1) = 0$$

$$x^2 - 6x + 1 = 0 \text{ atau } x^2 - 8x + 1 = 0$$

$$x = 3 \pm 2\sqrt{2} \text{ atau } x = 4 \pm \sqrt{15}$$

$$\text{Jadi, } x \in \{3 \pm 2\sqrt{2}, 4 \pm \sqrt{15}\}.$$

14. Usia 4 orang anak naik dengan suatu bilangan yang sama. Jumlah usia mereka adalah 36 tahun dan hasil kali usianya adalah 5.760. Berapakah usia mereka masing-masing.

**Solusi:**

Misalnya usia mereka  $a - 3b$ ,  $a - b$ ,  $a + b$ , dan  $a + 3b$ , sehingga

$$a - 3b + a - b + a + b + a + 3b = 36$$

$$4a = 36$$

$$a = 9$$

Sekarang usia mereka dapat ditulis sebagai  $9 - 3b$ ,  $9 - b$ ,  $9 + b$ , dan  $9 + 3b$ , sehingga

$$(9 - 3b)(9 - b)(9 + b)(9 + 3b) = 5760$$

$$(81 - 9b^2)(81 - b^2) = 5760$$

$$6561 - 81b^2 - 729b^2 + 9b^4 = 5760$$

$$9b^4 - 810b^2 + 801 = 0$$

$$b^4 - 90b^2 + 89 = 0$$

$$(b^2 - 89)(b^2 - 1) = 0$$

$$b^2 = 89 \text{ atau } b^2 = 1$$

$$b = \sqrt{89} \text{ (ditolak) atau } b = 1 \text{ (diterima).}$$

Jadi, usia mereka masing-masing adalah 6, 8, 10, dan 12 tahun.

15. Tentukanlah himpunan penyelesaian dari  $x^2 - 7x - \frac{40}{x^2 - 7x + 15} + 18 = 0$ .

**Solusi:**

Misalnya  $a = x^2 - 7x$ , maka diperoleh

$$a - \frac{40}{a + 15} + 18 = 0$$

$$a(a + 15) - 40 + 18(a + 15) = 0$$

$$a^2 + 15a - 40 + 18a + 270 = 0$$

$$a^2 + 33a + 230 = 0$$

$$(a + 10)(a + 23) = 0$$

$$a = -10 \text{ atau } a = -23$$

Sehingga:

$$x^2 - 7x = -10 \text{ atau } x^2 - 7x = -23$$

$$x^2 - 7x + 10 = 0 \text{ atau } x^2 - 7x + 23 = 0$$

$$(x-2)(x-5) = 0 \text{ atau } x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 23}}{2 \cdot 1}$$

$$x = 2, x = 5 \text{ atau } x = \frac{7 \pm i\sqrt{43}}{2}$$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah  $\left\{ 2, 5, \frac{7+i\sqrt{43}}{2}, \frac{7-i\sqrt{43}}{2} \right\}$ . Tetapi jika

dalam soal dinyatakan  $x \in R$ , maka himpunan penyelesaiannya adalah  $\{2, 5\}$ .

16. Tentukanlah penyelesaian persamaan  $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) = 48$ .

**Solusi:**

$$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) = 48$$

$$(x^2 - 5x + 4)(x^2 - 5x + 6) = 48$$

Misalnya  $x^2 - 5x = y$ , sehingga

$$(y+4)(y+6) = 48$$

$$y^2 + 10y + 24 = 48$$

$$y^2 + 10y - 24 = 0$$

$$(y-2)(y+12) = 0$$

$$y = 2 \text{ atau } y = -12$$

$$x^2 - 5x = 2 \text{ atau } x^2 - 5x = -12$$

$$x^2 - 5x - 2 = 0 \text{ atau } x^2 - 5x + 12 = 0 \text{ (tidak mempunyai akar real, karena } D < 0)$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25+8}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{33}}{2}$$

17. Jika  $y = x - \frac{1}{x}$ , tentukan  $x^5 - \frac{1}{x^5}$ .

**Solusi:**

$$x - \frac{1}{x} = y$$

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = y^2$$

$$x^2 - 2 + \frac{1}{x^2} = y^2$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 + 2$$

Selanjutnya,

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = y(y^2 + 2)$$

$$x^3 + \frac{1}{x} - x - \frac{1}{x^3} = y^3 + 2y$$

$$x^3 - \left(x - \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^3} = y^3 + 2y$$

$$x^3 - y - \frac{1}{x^3} = y^3 + 2y$$

$$x^3 - \frac{1}{x^3} = y^3 + 3y$$

Selanjutnya,

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 + 2$$

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 = (y^2 + 2)^2$$

$$x^4 + 2 + \frac{1}{x^4} = y^4 + 4y^2 + 4$$

$$x^4 + \frac{1}{x^4} = y^4 + 4y^2 + 2$$

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)\left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right) = y(y^4 + 4y^2 + 2)$$

$$x^5 + \frac{1}{x^3} - x^3 - \frac{1}{x^5} = y^5 + 4y^3 + 2y$$

$$x^5 - \left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right) - \frac{1}{x^5} = y^5 + 4y^3 + 2y$$

$$x^5 - (y^3 + 3y) - \frac{1}{x^5} = y^5 + 4y^3 + 2y$$

$$x^5 - \frac{1}{x^5} = y^5 + 4y^3 + 2y + y^3 + 3y$$

$$x^5 - \frac{1}{x^5} = y^5 + 5y^3 + 5y$$

18. Sebuah modal menghasilkan bunga dalam setahun \$210. Modal yang lain \$800 lebih besar dari modal pertama. Jika modal yang kedua dibungakan dengan 0,5% kurang dari yang pertama, maka bunganya berlebih \$15. Temukan besarnya modal dan suku bunganya yang pertama.

**Solusi:**

Misalnya modal itu adalah \$100*m* dan suku bunganya *p* %, sehingga

$$100m \times p\% = 210$$

$$mp = 210 \dots (1)$$

$$(100m + 800)(p - 0,5)\% = 210 + 15$$

$$(m + 8)(p - 0,5) = 225$$

$$mp - \frac{1}{2}m + 8p - 4 = 225$$

$$210 - \frac{1}{2}m + 8p - 4 = 225$$

$$8p - \frac{1}{2}m = 19$$

$$m = 16p - 38 \dots (2)$$

Dari persamaan (1) dan (2), kita memperoleh:

$$(16p - 38)p = 210$$

$$16p^2 - 38p - 210 = 0$$

$$8p^2 - 19p - 105 = 0$$

$$p = \frac{-(-19) \pm \sqrt{(-19)^2 - 4 \cdot 8(-105)}}{2 \cdot 8} = \frac{19 \pm \sqrt{361 + 3360}}{16} = \frac{19 \pm \sqrt{3721}}{16}$$

$$= \frac{19 \pm 61}{16}$$

$$p = \frac{19 + 61}{16} = 5 \text{ (diterima) atau } p = \frac{19 - 61}{16} = -2,625 \text{ (ditolak)}$$

$$p = 5 \rightarrow m = 16p - 38 = 16(5) - 38 = 42$$

Jadi, modal yang pertama adalah \$4200 dan suku bunganya 5%.

19. Diberikan  $[x]$  mewakili bilangan bulat terbesar kurang dari atau sama dengan

$$x. \text{ Carilah solusi dari persamaan } x + \frac{90}{x} = [x] + \frac{90}{[x]}.$$

**Solusi:**

$$x + \frac{90}{x} = [x] + \frac{90}{[x]}$$

$$(x - [x]) \left( 1 - \frac{90}{x[x]} \right) = \left( x + \frac{90}{x} \right) - \left( [x] + \frac{90}{[x]} \right) = 0$$

$$x - [x] \neq 0 \text{ atau } 1 - \frac{90}{x[x]} = 0$$

$$x \neq [x] \text{ atau } x[x] = 90$$

Jika  $x = n + d$  dengan  $0 < d < 1$ , maka  $n(n + d) = 90$ .

Jika  $n > 0$ , maka  $n^2 < 90 < n(n + 1)$  adalah tidak mungkin.

Jika  $n < 0$ , maka  $n(n + 1) < 90 < n^2$ , akibatnya  $n = -10$ ;  $d = 1$ ;  $x = 9$ .

20. Diberikan  $[x]$  berarti bilangan bulat terbesar atau sama dengan  $x$ . Carilah solusi tidak rasional dari persamaan  $x^2 - 18[x] + 80 = 0$ .

**Solusi:**

Catatan bahwa  $x^2 - 18[x] + 80 \geq 0$ , akibatnya  $x > 0$ .

Dengan  $x > 0$ ,  $x^2 < x^2 - 18[x] + 80 \geq 0$ , akibatnya  $8 < [x] < 10$ .

Untuk  $[x] = 8$  dan  $10$ , maka

$$[x] = 8 \rightarrow x^2 - 18[x] + 80 = 0$$

$$x^2 - 18 \times 8 + 80 = 0$$

$$x^2 = 64$$

$$x = \sqrt{64} = 8$$

$$[x] = 10 \rightarrow x^2 - 18[x] + 80 = 0$$

$$x^2 - 18 \times 10 + 80 = 0$$

$$x^2 = 100$$

$$x = \sqrt{100} = 10$$