Solusi Pengayaan Matematika
Edisi 2

Nomor Soal: 11-20

11. Tentukan nilai a dari persamaan $\sqrt[3]{13a+37}-\sqrt[3]{13a-37}=\sqrt[3]{2}$

Solusi:

$\sqrt[3]{13a+37}-\sqrt[3]{13a-37}=\sqrt[3]{2}$ (kedua ruas dipangkatkan 3)

$13a+37-3\left(\sqrt[3]{13a+37}\right)^2\sqrt[3]{13a-37}+3\sqrt[3]{13a+37}\left(\sqrt[3]{13a-37}\right)^2-13a+37=2$

$-3\sqrt[3]{13a+37}\sqrt[3]{13a-37}\left(\sqrt[3]{13a+37}-\sqrt[3]{13a-37}\right)=-72$

$\sqrt[3]{169a^2-1369}\sqrt[3]{2}=24$ (Kedua ruas dipangkatkan 3)

$\left(169a^2-1369\right)2=13824$

$169a^2-1369=6912$

$169a^2=8281$

$a^2=49$

$a=\pm 7$

12. Carilah nilai x dari $\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}}+\sqrt[3]{x-\sqrt{1+x^2}}=3$.

Solusi:

$\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}}+\sqrt[3]{x-\sqrt{1+x^2}}=3$

$x+\sqrt{1+x^2}+3\sqrt[3]{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\left(x-\sqrt{1+x^2}\right)}\left(\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}}+\sqrt[3]{x-\sqrt{1+x^2}}\right)+$

$x-\sqrt{1+x^2}=27$

$2x+3\sqrt[3]{x^2-\left(1+x^2\right)}(3)=27$

$2x+9\sqrt[3]{x^2-1-x^2}=27$

$2x-9=27$

$x=18$

13. Selesaikanlah persamaan: $\sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}}+\sqrt{x-2-\sqrt{2x-5}}=2\sqrt{2}$

Solusi:

Kita asumsikan bahwa $2x-5\geq 0$ atau $x\geq\frac{5}{2}$

$\sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}}+\sqrt{x-2-\sqrt{2x-5}}=2\sqrt{2}$ (kedua ruas dikalikan $\sqrt{2}$)

$\sqrt{2x+4+6\sqrt{2x-5}}+\sqrt{2x-4-2\sqrt{2x-5}}=4$

$$\sqrt{(2x-5)+6\sqrt{2x-5}+9}+\sqrt{(2x-5)-2\sqrt{2x-5}+1}=4$$

$$\sqrt{\left(\sqrt{2x-5}+3\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{2x-5}-1\right)^2}=4$$

$$\left|\sqrt{2x-5}+3\right|+\left|\sqrt{2x-5}-1\right|=4$$

Jika $2x-5\ge 1$ atau $x\ge 3$, maka diperoleh:

$$\sqrt{2x-5}+3+\sqrt{2x-5}-1=4$$

$$2\sqrt{2x-5}=2$$

$$2x-5=1$$

$$x=3$$

Jika $2x-5\le 1$ atau $x\le 3$, maka diperoleh:

$\sqrt{2x-5}+3-\sqrt{2x-5}+1=4$ adalah tautologi (pernyataan yang selalu benar)

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah interval $\left[\frac{5}{2},3\right]$.

14. Tentukanlah bilangan rasional *a* dan *b* yang memenuhi. $\sqrt{2\sqrt{3}-3}=\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}$.

Solusi:

$\sqrt{2\sqrt{3}-3}=\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}$ (kedua ruas dikuadratkan)

$2\sqrt{3}-3=\sqrt{a}-2\sqrt[4]{a}\sqrt[4]{b}+\sqrt{b}$ …. (1)

Dari persamaan (1) diperoleh: $2\sqrt{3}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$ dan $2\sqrt[4]{a}\sqrt[4]{b}=3$.

$2\sqrt{3}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$ (kedua ruas dikuadratkan)

$12=a+b+2\sqrt{ab}$ …. (2)

$2\sqrt[4]{a}\sqrt[4]{b}=3$ (kedua ruas dipangkatkan 4)

$$16ab=81$$

$ab=\frac{81}{16}$ …. (3)

Dari persamaan (2) dan (3) diperoleh:

$$12=a+b+2\sqrt{\frac{81}{16}}$$

$$12=a+b+\frac{9}{2}$$

$b=\frac{15}{2}-a$ …. (4)

Substitusikan $b=\frac{15}{2}-a$ ke persamaan (3), diperoleh:

$$a\left(\frac{15}{2}-a\right)=\frac{81}{16}$$

$$16a^2-120a+81=0$$

$$a_{1,2}=\frac{120\pm\sqrt{14400-5184}}{32}=\frac{120\pm 96}{32}$$

$a_1=6\frac{3}{4}$ (diterima) atau $a_2=\frac{3}{4}$ (ditolak)

Substitusikan $a_1=6\frac{3}{4}$ ke persamaan (5) diperoleh : $b_1=\frac{15}{2}-\frac{27}{4}=\frac{3}{4}$

Jadi, nilai $a=6\frac{3}{4}$ dan $b=\frac{3}{4}$

15. Tentukan himpunan penyelesaian dari persamaan $\sqrt[4]{97-x}+\sqrt[4]{x}=5$.

Solusi:

Misalnya $a=\sqrt[4]{x}$ dan $b=\sqrt[4]{97-x}$, sehingga

$a+b=5$ …. (1)

$a^4+b^4=x+97-x$

$a^4+b^4=97$ …. (2)

Ambillah $ab=p$, sehingga persamaan (2) menjadi:

$$a^4+b^4=97$$

$$(a+b)^4-4a^3b-6a^2b^2-4ab^3=97$$

$$(a+b)^4-4ab\left(a^2+b^2\right)-6a^2b^2=97$$

$$(a+b)^4-4ab\left[(a+b)^2-2ab\right]-6(ab)^2=97$$

$$5^4-4p\left(5^2-2p\right)-6p^2=97$$

$$625-100p+8p^2-6p^2-97=0$$

$$2p^2-100p+528=0$$

$$p^2-50p+264=0$$

$$(p-6)(p-44)=0$$

$p=6$ atau $p=44$

$ab=6$ atau $ab=44$

Dari $a+b=5$ dan $ab=6$ menghasilkan persamaan kuadrat sebagai berikut.

$$a^2-5a+6=0$$

$$(a-2)(a-3)=0$$

$a=2$ atau $a=3$

Jika $a = 2$, maka $a = \sqrt[4]{x} \Leftrightarrow 2 = \sqrt[4]{x} \Leftrightarrow x = 16$

Jika $a = 3$, maka $a = \sqrt[4]{x} \Leftrightarrow 3 = \sqrt[4]{x} \Leftrightarrow x = 81$

Dari $a + b = 5$ dan $ab = 44$ menghasilkan persamaan kuadrat $x^2 - 5x + 44 = 0$, yang akar-akarnya tidak real, karena diskriminan $D = \left(-5\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 44 = -151 < 0$.

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{16, 81\}$.

16. Persamaan $x^2 + px + 2 = 0$ akar-akarnya adalah α dan β. Jika $p > 0$ dan $F(n) = \alpha^n + \beta^n$, $F(-2) = 3$, tentukan nilai dari $F(3)$.

Solusi:

$x^2 + px + 2 = 0$, dengan $\alpha + \beta = -p$ dan $\alpha\beta = 2$

$$F(-2) = 3$$

$$\alpha^{-2} + \beta^{-2} = 3$$

$$\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} = 3$$

$$\frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2 \beta^2} = 3$$

$$\frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2} = 3$$

$$\frac{(-p)^2 - 2 \times 2}{(2)^2} = 3$$

$$p^2 - 4 = 12$$

$$p^2 = 16$$

$$p = \pm 4$$

Karena $p > 0$, maka yang memenuhi adalah $p = 4$.

$$F(3) = \alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = (-4)^3 - 3 \times 2(-4) = -64 + 24 = -40$$

Jadi, nilai dari $F(3)$ adalah -40.

17. Buktikan bahwa jika kedua akar dari $ax^2 + 2bx + c = 0$ adalah sama, maka a, b, dan c membentuk barisan geometri.

Solusi:

Karena akar-akarnya dari persamaan sama, maka diskriminan persamaan adalah 0, sehingga $4b^2 - 4ac = 0$, atau $b^2 = ac$. Jadi, $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$, sehingga suku-suku a, b, c membentuk sebuah barisan geometri.

18. Hitunglah nilai y^2, dengan y adalah jumlah nilai mutlak akar-akar persamaan

$$x=\sqrt{19}+\cfrac{91}{\sqrt{19}+\cfrac{91}{\sqrt{19}+\cfrac{91}{\sqrt{19}+\cfrac{91}{\dots}}}}.$$

Solusi:

$$x=\sqrt{19}+\underbrace{\cfrac{91}{\sqrt{19}+\cfrac{91}{\sqrt{19}+\cfrac{91}{\sqrt{19}+\cfrac{91}{\dots}}}}}_{x}$$

$$x=\sqrt{19}+\frac{91}{x}$$

$$x^2-91=x\sqrt{19}$$

$$x^2-x\sqrt{19}-91=0$$

$$x_{1,2}=\frac{\sqrt{19}\pm\sqrt{19+364}}{2}=\frac{\sqrt{19}\pm\sqrt{383}}{2}$$

$$x_1=\frac{\sqrt{19}+\sqrt{383}}{2}\text{ atau }x_2=\frac{\sqrt{19}-\sqrt{383}}{2}$$

$$y=|x_1|+|x_2|=\left|\frac{\sqrt{19}+\sqrt{383}}{2}\right|+\left|\frac{\sqrt{19}-\sqrt{383}}{2}\right|=\frac{\sqrt{19}+\sqrt{383}}{2}+\frac{-\sqrt{19}+\sqrt{383}}{2}$$

$$=\sqrt{383}$$

$$y^2=\left(\sqrt{383}\right)^2=383$$

19. Tentukan semua bilangan bulat positf x, sehingga x^2-5x+6 adalah bilangan prima positif.

Solusi:

Bentuk kuadrat x^2-5x+6 dapat difaktorkan menjadi $(x-2)(x-3)$. Seandainya bilangan ini prima, maka salah satu faktornya harus 1 atau –1, jika tidak bilangannya memiliki dua faktor tak trivial (bukan 1) yang berlainan dan tentunya bukan bilangan prima. Jadi, kemungkinannya untuk x adalah 1, 2, 3, dan 4. Kita langsung dapat mengucilkan 2 dan 3, sebab ungkapan itu akan menjadi 0 untuk kedua nilai ini. Sedangkan untuk 1 dan 4 ungkapan sama dengan 2 adalah bilangan prima.

Jadi, penyelesaian yang diminta adalah 1 dan 4.

20. Untuk bilangan real x yang manakah $\sqrt[3]{x+\sqrt{x^2+1}}+\sqrt[3]{x-\sqrt{x^2+1}}$ adalah suatu bilangan bulat?

Solusi:

Misalnya $n=\sqrt[3]{x+\sqrt{x^2+1}}+\sqrt[3]{x-\sqrt{x^2+1}}$, sehingga

$$n^3 = x+\sqrt{x^2+1}+$$

$$3\left(\sqrt[3]{x+\sqrt{x^2+1}}+\sqrt[3]{x-\sqrt{x^2+1}}\right)\left(\sqrt[3]{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)}\right)+x-\sqrt{x^2+1}$$

$$n^3 = 2x+3n\sqrt[3]{x^2-\left(x^2+1\right)}$$

$$n^3 = 2x-3n$$

$$2x = n^3+3n$$

$x=\dfrac{n^3+3n}{2}$ adalah bilangan bulat untuk n bilangan bulat.