

# Solusi Pengayaan Matematika

## Edisi 2

### Nomor Soal: 11-20

11. Diberikan  $3x^2 + x = 1$ , tentukan nilai  $6x^3 - x^2 - 3x + 2008$ .  
 A. 2007                      B. 2008                      C. 2009                      D. 2010                      E. 2011

**Solusi: [B]**

$$\begin{aligned} 6x^3 - x^2 - 3x + 2008 &= 2x(3x^2 + x - 1) - (3x^2 + x - 1) + 2008 \\ &= 2x(0) - (0) + 2008 = 2008 \end{aligned}$$

12. Diberikan  $k$  adalah konstanta positif dan persamaan  $k^2x - k^2 = 2kx - 5k$  mempunyai penyelesaian positif untuk  $x$ . Tentukan nilai  $k$ .  
 A.  $2 > k > 0 \vee k > 5$                       C.  $2 < k < 5$                       E.  $0 < k < 2$   
 B.  $k < 2 \vee k > 5$                       D.  $0 < k < 5$

**Solusi: [A]**

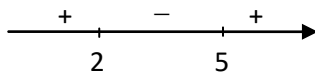
$$\begin{aligned} k^2x - k^2 &= 2kx - 5k \\ k^2x - 2kx &= k^2 - 5k \\ (k^2 - 2k)x &= k^2 - 5k \end{aligned}$$

$$x = \frac{k^2 - 5k}{k^2 - 2k}$$

Karena persamaan mempunyai penyelesaian positif untuk  $x$ , maka haruslah

$$\frac{k^2 - 5k}{k^2 - 2k} > 0$$

$$\frac{k - 5}{k - 2} > 0$$



$$k < 2 \vee k > 5 \dots (1)$$

Dari data yang diberikan  $k > 0 \dots (1)$

Sehingga  $(1) \cap (2)$  diperoleh  $2 > k > 0 \vee k > 5$

13. Persamaan  $x^2 + x - 2008 = 0$  mempunyai akar-akar  $r$  dan  $s$ . Hitunglah  $2r^2 + rs + s^2 + r - 2008$ .  
 A. 2005                      B. 2006                      C. 2007                      D. 2008                      E. 2009

**Solusi: [E]**

$$\begin{aligned} x^2 + x - 2008 = 0 &\text{ mempunyai akar-akar } r \text{ dan } s, \text{ sehingga } r^2 + r - 2008 = 0 \text{ dan} \\ s^2 + s - 2008 &= 0. \\ r + s &= -1 \text{ dan } rs = -2008 \end{aligned}$$

$$2r^2 + rs + s^2 + r - 2008 = (r^2 + r - 2008) + r^2 + rs + s^2 = (0) + (r + s)^2 - rs$$

$$= (-1)^2 - (-2008) = 2009$$

14. Akar-akar persamaan kuadrat  $x^2 + ax + b = 0$  adalah kuadrat dari akar-akar  $x^2 - 3x + 2 = 0$ . Akar-akar dari  $x^2 + cx + d = 0$  adalah pangkat tiga dari akar-akar  $x^2 + ax + b = 0$ . Tentukan nilai numerical dari  $c + d$ .
- A. 10                      B. 64                      C. 72                      D. 73                      E. 74

**Solusi: [E]**

Akar-akar persamaan kuadrat  $x^2 + ax + b = 0$  adalah  $p$  dan  $q$ , dengan  $p = x_1^2$  dan  $q = x_1^2$

Akar-akar persamaan kuadrat  $x^2 - 3x + 2 = 0$  adalah  $x_1$  dan  $x_2$

Akar-akar persamaan kuadrat  $x^2 + cx + d = 0$  adalah  $m$  dan  $n$ , dengan

$$m = p^3 = x_1^6 \text{ dan } n = q^3 = x_2^6$$

$$m + n = x_1^6 + x_2^6 = (x_1^2 + x_2^2)^3 - 3x_1^2 x_2^2 (x_1^2 + x_2^2)$$

$$-c = [(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2]^3 - 3(x_1 + x_2)^2 [(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2]$$

$$-c = (3^2 - 2 \cdot 2)^3 - 3 \cdot 3^2 (3^2 - 2 \cdot 2)$$

$$-c = 125 - 135$$

$$c = 10$$

$$m \cdot n = x_1^6 \cdot x_2^6 = (x_1 x_2)^6 = 2^6 = 64$$

$$d = 64$$

Jadi,  $c + d = 10 + 64 = 74$

15. Diberikan  $a$  dan  $b$  adalah bilangan prima sehingga persamaan  $ax^2 - bx + a = 0$  mempunyai akar-akar rasional. Tentukan  $\frac{a+b}{ab}$ .
- A.  $\frac{7}{10}$                       B.  $\frac{6}{10}$                       C.  $\frac{5}{10}$                       D.  $\frac{3}{10}$                       E.  $\frac{2}{10}$

**Solusi: [A]**

Jika  $x$  adalah solusi dari  $ax^2 - bx + a = 0$ , maka  $x > 0$ .

Ambillah  $x = \frac{m}{n}$ , dengan  $m$  dan  $n$  relatif bilangan prima positif, sehingga

$$a \left( \frac{m}{n} \right)^2 - b \left( \frac{m}{n} \right) + a = 0$$

$$am^2 - bmn + an^2 = 0$$

$$m(bn - am) = an^2 \text{ yang akibatnya } m|p$$

Sehingga  $m = 1$  atau  $m = a$  dan  $n = 1$  atau  $n = a$ .

Kita memperoleh  $x = 1$  atau  $x = a$  atau  $x = \frac{1}{a}$ .

Jika  $x = 1$ , maka  $b = 2a$  yang mana tidak mungkin untuk  $b$  prima.

Jika  $x = a$  atau  $x = \frac{1}{a}$ , maka diperoleh  $b = a^2 + 1$ . Dengan demikian  $p$  harus

genap, sehingga  $a = 2$  dan  $b = 5$ .

$$\text{Jadi, } \frac{a+b}{ab} = \frac{2+5}{2 \cdot 5} = \frac{7}{10}$$

16. Tentukan banyak pasangan  $(b, c)$  dengan  $-20 \leq b \leq 20$  dan  $-20 \leq c \leq 20$ , sehingga persamaan  $x^2 + bx + c = 0$  dan  $x^2 + cx + b = 0$  mempunyai sebuah akar persekutuan (akar berserikat).
- A. 27                  B. 40                  C. 41                  D. 81                  E. 1640

**Solusi: [D]**

Misalnya akar persekutuan tersebut adalah  $r$ , sehingga

$$r^2 + br + c = r^2 + cr + b$$

$$br - cr - b + c = 0$$

$$(b - c)r - (b - c) = 0$$

$$(b - c)(r - 1) = 0$$

$$b = c \text{ atau } r = 1$$

Jika  $r = 1$ , maka  $1 + b + c = 0 \Leftrightarrow c = -1 - b$

Terdapat 41 pasangan  $(b, c)$ , jika  $b = c$ .

Jika  $c = -1 - b$  dan  $-20 \leq b \leq 20$ , maka  $-20 \leq c \leq 20 \Leftrightarrow -20 \leq -1 - b \leq 20 \Leftrightarrow -19 \leq -b \leq 21 \Leftrightarrow -21 \leq b \leq 19$ , sehingga ada 40 pasangan  $(b, c)$  atau  $(b, -1 - b)$ .

Jadi, banyak pasangan  $(b, c)$  yang diminta adalah  $41 + 40 = 81$ .

17. Tentukan semua bilangan real  $k$  sedemikian sehingga dua polinomial  $2x^2 + kx + 1$  dan  $2x^2 + x + k$  mempunyai sekurang-kurangnya satu akar persekutuan real.
- A. 3                  B. 2                  C. 1                  D. -2                  E. -3

**Solusi: [E]**

Jelaslah bahwa untuk  $a = 1$  membuat dua polinomial identik, sehingga

$$2x^2 + kx + 1 = 0 \Rightarrow k = \frac{-(1 + 2x^2)}{x}$$

$$2x^2 + x + k = 0 \Rightarrow k = -(x + 2x^2)$$

Kesamaan-kesamaan ini memberikan

$$\frac{-(1+2x^2)}{x} = -(x+2x^2)$$

$$1+2x^2 = x^2 + 2x^3$$

$$2x^3 - x^2 - 1 = 0$$

$$(x-1)(2x^2+x+1) = 0$$

$$x = 1 \text{ (diterima) atau } 2x^2 + x + 1 = 0 \text{ (ditolak, } D < 0)$$

$$x = 1 \Rightarrow k = \frac{-(1+2 \cdot 1^2)}{1} = -3$$

18. Jika hasil dari  $\frac{3}{1 + \frac{3}{1 + \dots}}$  dinyatakan sebagai  $\frac{a + \sqrt{b}}{c}$ , maka tentukan nilai

$$a + b + c.$$

A. 12

B. 13

C. 14

D. 15

E. 16

**Solusi: [C]**

- A.** Misalnya  $x = \frac{3}{1 + \frac{3}{1 + \dots}}$ , sehingga

$$x = \frac{3}{1+x}$$

$$x^2 + x - 3 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

Di sini jelas bahwa  $\frac{3}{1 + \frac{3}{1 + \dots}} > 0$ , sehingga  $\frac{3}{1 + \frac{3}{1 + \dots}} = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}$

$$= \frac{a + \sqrt{b}}{c}.$$

Karena itu,  $a = -1, b = 13$ , dan  $c = 2$ .

Jadi,  $a + b + c = -1 + 13 + 2 = 14$ .

19. Hitunglah  $\frac{2}{1 + \frac{2}{1 + \dots}}$

A. 5

B. 4

C. 3

D. 2

E. 1

**Solusi: [E]**

Misalnya  $x = \frac{2}{1 + \frac{2}{1 + \dots}}$ , sehingga

$$x = \frac{2}{1 + x}$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$(x + 2)(x - 1) = 0$$

$$x = -2 \text{ atau } x = 1$$

Karena  $\frac{2}{1 + \frac{2}{1 + \dots}} > 0$ , maka  $\frac{2}{1 + \frac{2}{1 + \dots}} = 1$ .

20. Jika  $x^2 + x = 2008$ , maka nilai dari ekspresi  $x^3 + 2x^2 - 2008$  adalah ....  
A. 4026      B.  $2012 - \sqrt{5}$       C.  $2013 - \sqrt{5}$       D. 2012      E. 0

**Solusi: [E]**

$$x^3 + 2x^2 - 2008 = x^3 + x^2 + x^2 - 2008 = x(x^2 + x) + x^2 - 2008$$

$$= x(1) + x^2 - 2008 = x^2 + x - 2008 = 2008 - 2008 = 0$$