

Solusi Pengayaan Matematika

Edisi 2

Nomor Soal: 11-20

11. Jika $p = 1 + \frac{6}{1 + \frac{6}{1 + \frac{6}{\dots}}}$, hitunglah nilai $p^2 + 2007$.

- A. 2020 B. 2018 C. 2016 D. 2008 E. 2007

Solusi: [C]

$$p = 1 + \frac{6}{1 + \frac{6}{1 + \frac{6}{\dots}}}$$

$$p = 1 + \frac{6}{p}$$

$$p^2 = p + 6$$

$$p^2 - p - 6 = 0$$

$$(p - 3)(p + 2) = 0$$

$$p = 3 \text{ (diterima) atau } p = -2 \text{ (ditolak)}$$

$$\text{Jadi, } p^2 + 1 = 3^2 + 2007 = 2016$$

12. Jika α merupakan salah satu akar persamaan $x^2 - x + 2 = 0$ dan bilangan

$N = \frac{4014}{\alpha^4 + 3\alpha}$, maka jumlah angka-angka bilangan N adalah

- A. 9 B. 8 C. 7 D. 6 E. 2

Solusi: [A]

$$x = \alpha \rightarrow x^2 - x + 2 = 0$$

$$\alpha^2 - \alpha + 2 = 0$$

$$\alpha^2 = \alpha - 2$$

$$\alpha^4 = \alpha^2 - 4\alpha + 4$$

$$\alpha^4 + 3\alpha = (\alpha^2 - \alpha + 2) + 2$$

$$\alpha^4 + 3\alpha = (0) + 2$$

$$\alpha^4 + 3\alpha = 2$$

$$N = \frac{4014}{\alpha^4 + 3\alpha} = \frac{4014}{2} = 2007$$

Jadi, jumlah angka-angka bilangan N adalah $2 + 0 + 0 + 7 = 9$.

13. Diberikan $x^2 - x - 1 = 0$. Sederhanakan $\frac{x^3 + x + 1}{x^5}$ dalam bentuk polynomial (suku banyak).

A. $x^3 + x^2$ B. $x^2 - 1$ C. $x^2 + 1$ D. $x - 1$ E. $x + 1$

Solusi: [D]

$x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = x + 1$, sehingga

$$\frac{x^3 + x + 1}{x^5} = \frac{x^3 + x^2}{x^5} = \frac{x + 1}{x^3} = \frac{x^2}{x^3} = \frac{1}{x} = \frac{x^2 - x}{x} = x - 1$$

14. Penyelesaian real dari persamaan $x^2 + \frac{x^2}{(x+1)^2} = 3$ adalah

A. $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ C. $1 \pm \sqrt{5}$ D. $1 \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$ E. $\frac{1}{2} \pm \sqrt{5}$

Solusi: [A]

$$x^2 + \frac{x^2}{(x+1)^2} = 3$$

$$x^4 + 2x^3 - x^2 - 6x - 3 = 0$$

$$(x^2 + x + 1)^2 - 4(x+1)^2 = 0$$

$$(x^2 + 3x + 3)(x^2 - x - 1) = 0$$

$$x^2 + 3x + 3 = 0 \text{ atau } x^2 - x - 1 = 0$$

$$x = \frac{1}{2}(-3 \pm i\sqrt{3}) \text{ atau } x = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$$

15. Seorang pedagang eceran membeli sejumlah baju seharga \$180. Kemudian ia menjual semuanya dan 6 baju memberi laba \$2 tiap baju. Dengan total uang yang diterima ia dapat membelikan baju sebanyak 30 lebih dari pembelian semula. Tentukan harga 3 potong baju.

A. \$18 B. \$15 C. \$12 D. \$9 E. \$3

Solusi: [D]

Misalnya harga sepotong baju adalah \$ x dan banyaknya baju yang dibeli adalah

$\frac{180}{x}$, sehingga

$$\left(\frac{180}{x} - 6\right)(x + 2) = x\left(\frac{180}{x} + 30\right)$$

$$(180 - 6x)(x + 2) = x(180 + 30x)$$

$$180x + 360 - 6x^2 - 12x = 180x + 30x^2$$

$$36x^2 + 12x - 360 = 0$$

$$3x^2 + x - 30 = 0$$

$$(3x+10)(x-3) = 0$$

$$x = -\frac{10}{3} \text{ (ditolak) atau } x = 3 \text{ (diterima)}$$

Jadi, harga 3 potong baju adalah $3 \times \$3 = \9 .

16. Jika x_1 dan x_2 adalah akar-akar persamaan kuadrat $x^2 - (p^2 + q^2)x + pq = 0$ dan $2(x_1 + x_2) = 5x_1x_2$, carilah hubungan p dan q .

A. $p = 2q$ B. $q = 2p$ C. $p = q$ D. $p = \frac{3}{2}q$ E. $pq = 2$

Solusi: [A]

Dari persamaan kuadrat $x^2 - (p^2 + q^2)x + pq = 0$ diperoleh $x_1 + x_2 = p^2 + q^2$ dan $x_1x_2 = pq$

$$2(x_1 + x_2) = 5x_1x_2$$

$$2(p^2 + q^2) = 5pq$$

$$2p^2 - 5pq + 2q^2 = 0$$

$$(2p - q)(p - 2q) = 0$$

$$p = \frac{1}{2}q \text{ atau } p = 2q$$

17. Jika $a - \frac{1}{a} = 2$ dan $x > 0$, tentukanlah nilai $a + \frac{1}{a}$.

A. $2\sqrt{8}$ B. $2\sqrt{2}$ C. 2 D. $\sqrt{2}$ E. 1

Solusi 1: [B]

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 = \left(a - \frac{1}{a}\right)^2 + 4 \cdot a \cdot \frac{1}{a} = 2^2 + 4 = 8$$

$$a + \frac{1}{a} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Solusi 2:

$$a - \frac{1}{a} = 2$$

$$\left(a - \frac{1}{a}\right)^2 = 2^2$$

$$a^2 - 2 + \frac{1}{a^2} = 4$$

$$a^2 + \frac{1}{a^2} = 6$$

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 2 = 6$$

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 = 8$$

$$a + \frac{1}{a} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

18. Sejumlah siswa di suatu sekolah mengumpulkan uang sebanyak Rp 9.600.000,00. Setiap siswa harus memberi iuran yang sama. Kemudian ternyata bahwa 4 orang siswa tidak membayar iurannya. Untuk menutupi kekurangannya, siswa-siswa lainnya harus menambah iurannya, masing-masing Rp 200.000,00. Berapakah jumlah siswa yang membayar dan besar iurannya ?

A. Rp1.000.000,00

C. Rp840.000,00

E. Rp780.000,00

B. Rp960.000,00

D. Rp800.000,00

Solusi: [C]

Misalnya siswa seluruhnya = x orang, maka siswa yang membayar = $(x - 4)$ orang.

$$\frac{9.600.000}{x-4} = \frac{9.600.000}{x} + 200.000$$

$$48x = 48x - 192 + x^2 - 4x$$

$$x^2 - 4x - 192 = 0$$

$$(x-16)(x+12) = 0$$

$$x = 16 \text{ (diterima) atau } x = -12 \text{ (ditolak)}$$

Jadi, siswa yang membayar adalah $(16 - 4)$ orang = 12 orang dan besar

iurannya adalah $\frac{\text{Rp}9.600.000,00}{12} = \text{Rp}800.000,00$.

19. Jika a dan b bilangan real berbeda sehingga $\frac{a}{b} + \frac{a+10b}{b+10a} = 2$, maka nilai $\frac{a}{b}$ adalah

A. 5

B. 4

C. $\frac{5}{4}$

D. 1

E. $\frac{4}{5}$

Solusi: [E]

$$\frac{a}{b} + \frac{a+10b}{b+10a} = 2 \text{ (kedua ruas dikalikan dengan } b(b+10a))$$

$$a(b+10a) + b(a+10b) = 2b(b+10a)$$

$$ab + 10a^2 + ab + 10b^2 = 2b^2 + 20ab$$

$$10a^2 - 18ab + 8b^2 = 0 \text{ (kedua ruas dibagi } 2b^2)$$

$$5\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 9\left(\frac{a}{b}\right) + 4 = 0$$

$$\left(5\frac{a}{b} - 4\right)\left(\frac{a}{b} - 1\right) = 0$$

$$5\frac{a}{b} - 4 = 0 \text{ atau } \frac{a}{b} - 1 = 0$$

$$\frac{a}{b} = \frac{4}{5} \text{ (diterima) atau } \frac{a}{b} = 1 \text{ (ditolak, karena } a \neq b)$$

20. Yuda mengendarai mobil A dan Fauzan mengendarai mobil B , bersama-sama berangkat dari tempat P menuju tempat Q . Yuda berangkat 3 jam setelah Fauzan berangkat dari tempat yang sama dengan selisih kecepatan 10 km/jam. Setelah menempuh jarak 360 km, kedua pengendara ini bertemu. Dapatkan Anda menentukan kecepatan mobil A ?

A. 60 km/jam B. 50 km/jam C. 45 km/jam D. 40 km/jam E. 30 km/jam

Solusi: [D]

Misalnya v_a km/jam dan t_a jam adalah kecepatan dan waktu yang digunakan oleh mobil A ; v_b km/jam dan t_b jam adalah kecepatan dan waktu yang digunakan oleh mobil B , sehingga

$$t_b = t_a + 3 \dots (1)$$

$$v_b = v_a - 10 \dots (2)$$

$$v_a \times t_a = 360$$

$$t_a = \frac{360}{v_a} \dots (3)$$

$$v_b \times t_b = 360 \dots (4)$$

Dari persamaan (1), (2), (3), dan (4) diperoleh:

$$(v_a - 10) \times \left(\frac{360}{v_a} + 3 \right) = 360$$

$$360 + 3v_a - \frac{3600}{v_a} - 30 = 360$$

$$3v_a^2 - 3600 - 30v_a = 0$$

$$v_a^2 - 10v_a - 1200 = 0$$

$$(v_a - 40)(v_a + 30) = 0$$

$$v_a = 40 \text{ (diterima) atau } v_b = -30 \text{ (ditolak)}$$

Jadi, kecepatan mobil A adalah 40 km/jam.