

Solusi Pengayaan Matematika

Edisi 2

Nomor Soal: 11-20

11. Jika $a = 1 + \frac{2}{1 + \frac{2}{1 + \frac{2}{\dots}}}$, maka angka satuan dari a^{2006} adalah

- A. 8 B. 6 C. 4 D. 3 E. 2

Solusi: [C]

$$a = 1 + \frac{2}{1 + \frac{2}{1 + \frac{2}{\dots}}}$$

$$a = 1 + \frac{2}{a}$$

$$a^2 = a + 2$$

$$a^2 - a - 2 = 0$$

$$(a - 2)(a + 1) = 0$$

$$a = 2 \text{ (diterima) atau } a = -1 \text{ (ditolak)}$$

Pola angka satuan dari 2^n dengan n bilangan bulat positif (bilangan asli) adalah 2, 4, 8, 6.

Karena $a^{2006} = 2^{2006} = 2^{4 \times 501 + 2}$, maka angka satuan dari 2^{2006} adalah 4.

12. Dua akar persamaan kuadrat $x^2 - 2006x + c = 0$ adalah bilangan prima. Berapakah nilai c ?

- A. 2006 B. 2007 C. 4012 D. 6006 E. 6009

Solusi: [E]

Misalnya akar-akar persamaan kuadrat $x^2 - 2006x + c = 0$ adalah x_1 dan x_2 .

$$x_1 + x_2 = 2006$$

Bilangan 2006 terdiri atas dua bilangan prima yaitu 3 dan 2003, sehingga akar-akar persamaan kuadrat tersebut adalah 3 dan yang lain adalah 2003.

$$\text{Jadi, } c = x_1 x_2 = 3 \times 2003 = 6009$$

13. Jika $x^2 + x = 1$, maka nilai dari pernyataan $x^3 + 2x^2 + 2006$ adalah

- A. 2005 B. 2006 C. 2007 D. $2007 - \sqrt{5}$ E. $2007 - \sqrt{5}$

Solusi: [C]

$$x^3 + 2x^2 + 2006 = x^3 + x^2 + x^2 + 2006 = x(x^2 + x) + x^2 + 2006 = x(1) + x^2 + 2006 = x^2 + x + 2006 = 1 + 2006 = 2007$$

14. Hasil kali akar-akar dari persamaan $(6x + 28)^{\frac{1}{3}} - (6x - 28)^{\frac{1}{3}} = 2$ adalah
 A. 36 B. 26 C. -12 D. -24 E. -36

Solusi: [E]

Konsep $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$

$$(6x + 28)^{\frac{1}{3}} - (6x - 28)^{\frac{1}{3}} = 2$$

$$(6x + 28) - (6x - 28) - 3(6x + 28)^{\frac{1}{3}}(6x - 28)^{\frac{1}{3}} = 2^3$$

$$56 - 6(36x^2 - 784)^{\frac{1}{3}} = 8$$

$$6(36x^2 - 784)^{\frac{1}{3}} = 48$$

$$(36x^2 - 784)^{\frac{1}{3}} = 8$$

$$36x^2 - 784 = 512$$

$$36x^2 = 1296$$

$$x^2 = 36$$

$$x = \pm 6$$

Jadi, hasil kali akar-akarnya adalah -36.

15. Jika akar-akar dari persamaan kuadrat $x^2 + ax + b = 0$ ditambah 3 maka diperoleh persamaan kuadrat $x^2 + bx + a = 0$, tentukan nilai b .
 A. 10 B. 6 C. 5 D. -1 E. -5

Solusi: [E]

Misalnya akar-akar persamaan kuadrat $x^2 + ax + b = 0$ adalah α dan β , sehingga $\alpha + \beta = -a$ dan $\alpha\beta = b$.

Persamaan kuadrat yang baru yang $\alpha + 3$ dan $\beta + 3$ adalah

$$x^2 - (\alpha + 3 + \beta + 3)x + (\alpha + 3)(\beta + 3) = 0$$

$$x^2 - (\alpha + \beta + 6)x + \alpha\beta + 3(\alpha + \beta) + 9 = 0$$

$$x^2 - (-a + 6)x + b + 3(-a) + 9 = 0$$

$$x^2 + (a - 6)x + b - 3a + 9 = 0$$

Persamaan kuadrat $x^2 + (a - 6)x + b - 3a + 9 = 0$ identik dengan persamaan

kuadrat $x^2 + bx + a = 0$, maka diperoleh:

$$a - 6 = b \dots (1)$$

$$b - 3a + 9 = a \dots (2)$$

Dari persamaan (1) dan (2), kita memperoleh:

$$a - 6 - 3a + 9 = a$$

$$3a = 3$$

$$a = 1$$

$$a = 1 \rightarrow a - 6 = b$$

$$1 - 6 = b$$

$$b = -5$$

Jadi, nilai dari a dan b berturut-turut adalah 1 dan -5 .

16. Penyelesaian persamaan $x^2 + ax + b = 0$ adalah pangkat tiga dari persamaan

$x^2 + mx + n = 0$. Manakah dari yang berikut ini hubungan yang benar?

A. $a = m^3 + 3mn$

C. $a = 3mn - m^3$

E. $a = m - 3mn$

B. $a = m^3 - 3mn$

D. $a + b = m^3$

Solusi: [B]

Penyelesaian persamaan $x^2 + ax + b = 0$ adalah x_1^3 dan x_2^3 .

$$-a = x_1^3 + x_2^3$$

$$b = x_1^3 \cdot x_2^3$$

Penyelesaian persamaan $x^2 + mx + n = 0$ adalah x_1 dan x_2 .

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = (-m)^3 - 3n(-m) = -m^3 + 3mn$$

Sehingga

$$-a = x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = (-m)^3 - 3n(-m) = -m^3 + 3mn$$

$$a = m^3 - 3mn$$

17. Banyak akar-akar real x yang memenuhi $12x^4 - 56x^3 + 89x^2 - 56x + 12 = 0$ adalah

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

E. 4

Solusi: [E]

$$12x^4 - 56x^3 + 89x^2 - 56x + 12 = 0$$

$$12x^2 - 56x + 89 - \frac{56}{x} + \frac{12}{x^2} = 0$$

$$12x^2 + \frac{12}{x^2} - 56x - \frac{56}{x} + 89 = 0$$

$$12x^2 + \frac{12}{x^2} - 56x - \frac{56}{x} + 89 = 0$$

$$12\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 24 - 56\left(x + \frac{1}{x}\right) + 89 = 0$$

$$12\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 56\left(x + \frac{1}{x}\right) + 65 = 0$$

Misalnya $x + \frac{1}{x} = a$, sehingga

$$12a^2 - 56a + 65 = 0$$

$$(2a - 5)(6a - 13) = 0$$

$$a = \frac{5}{2} \text{ atau } a = \frac{13}{6}$$

$$x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2} \text{ atau } x + \frac{1}{x} = \frac{13}{6}$$

$$2x^2 - 5x + 2 = 0 \text{ atau } 6x^2 - 13x + 6 = 0$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} \text{ atau } x = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{12}$$

$$x = \frac{5 \pm 3}{4} \text{ atau } x = \frac{13 \pm 5}{12}$$

$$x = 2 \text{ atau } x = \frac{1}{2} \text{ atau } x = \frac{3}{2} \text{ atau } x = \frac{2}{3}$$

18. Tentukanlah nilai terbesar dari a sedemikian sehingga kedua akar persamaan kuadrat $x^2 + ax + 6a = 0$ adalah bulat.

A. 9 B. 16 C. 27 D. 32 E. 49

Solusi: [E]

Misalnya akar-akar bulat persamaan kuadrat $x^2 + ax + 6a = 0$ adalah m dan n . Maka a harus sebuah bilangan bulat dan $a = -(m + n)$, $6a = mn$, sehingga:

$$-6(m + n) = mn$$

$$(m + 6)(n + 6) = 36$$

Persamaan tersebut memiliki 10 penyelesaian utuh (bilangan bulat) pasangan (m, n) adalah $(-5, 30)$; $(-4, 12)$; $(-3, 6)$; $(-2, 3)$; $(0, 0)$; $(-42, -7)$; $(-24, -8)$; $(-18, -9)$; $(-15, -10)$; $(-12, -12)$; untuk $m \leq n$ Nilai terbesar dari a adalah 49 untuk $(m, n) = (-42, -7)$.

19. Jika $x + \frac{1}{x} = \sqrt{2}$, maka nilai $x^8 + \frac{1}{x^8}$ adalah

A. 8 B. 6 C. 4 D. 3 E. 2

Solusi: [E]

$$x + \frac{1}{x} = \sqrt{2}$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = (\sqrt{2})^2$$

$$x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = 2$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 = 0^2$$

$$x^4 + 2 + \frac{1}{x^4} = 0$$

$$x^4 + \frac{1}{x^4} = -2$$

$$\left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right)^2 = (-2)^2$$

$$x^8 + 2 + \frac{1}{x^8} = 4$$

$$x^8 + \frac{1}{x^8} = 2$$

20. Jumlah nilai mutlak dari akar-akar persamaan $x^2 - |x| - 6 = 0$ adalah
A. 9 B. 8 C. 6 D. 4 E. 0

Solusi 1: [C]

Misalnya $y = |x|$, sehingga

$$y^2 = |x|^2 = x^2$$

$$x^2 - |x| - 6 = 0$$

$$y^2 - y - 6 = 0$$

$$(y + 2)(y - 3) = 0$$

$y = -2$ (ditolak, karena $y > 0$) atau $y = 3$

$$3 = |x|$$

$$9 = x^2$$

$$(x + 3)(x - 3) = 0$$

$x = -3$ atau $x = 3$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{-3, 3\}$

Solusi 2:

Jika $x \geq 0$, maka $|x| = x$, sehingga

$$x^2 - |x| - 6 = 0$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$(x - 3)(x + 2) = 0$$

$x = 3$ (diterima) atau $x = -2$ (ditolak, karena $x \geq 0$)

Jika $x < 0$, maka $|x| = -x$, sehingga

$$x^2 - |x| - 6 = 0$$

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$(x - 2)(x + 3) = 0$$

$x = 2$ (ditolak, karena $x < 0$) atau $x = -3$ (diterima)

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{-3, 3\}$