

Solusi Pengayaan Matematika

Edisi 1

Nomor Soal: 1-10

1. Jika $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 5$ dan $N = \frac{2x + 4xy - 2y}{x - y + 2xy}$, maka angka satuan dari N^{2010} adalah

A. 8 B. 6 C. 4 D. 2 E. 1

Solusi: [C]

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 5 \Leftrightarrow y - x = 5xy$$

$$\frac{2x + 4xy - 2y}{x - y + 2xy} = \frac{4xy - 2(y - x)}{2xy - (y - x)} = \frac{4xy - 10xy}{2xy - 5xy} = \frac{-6xy}{-3xy} = 2$$

Pola angka satuan dari bilangan 2^n dengan n bilangan asli adalah 2, 4, 8, 6.

Karena $N^{2010} = 2^{504 \times 2 + 2}$, maka angka satuannya adalah 4.

2. Sederhanakanlah $\sqrt[p]{\frac{36^{3p+2} - 216^{2p+1}}{1.080}}$.

A. 36 B. 216 C. 1.296 D. 7.776 E. 46.656

Solusi: [E]

$$\begin{aligned} \sqrt[p]{\frac{36^{3p+2} - 216^{2p+1}}{1.080}} &= \sqrt[p]{\frac{6^{6p+4} - 6^{6p+3}}{1.080}} = \sqrt[p]{\frac{6^{6p}(6^4 - 6^3)}{1.080}} \\ &= \sqrt[p]{6^{6p}} = 6^6 = 46.656 \end{aligned}$$

3. Jika x , y , dan z adalah bilangan real yang memenuhi $(x-2)^2 + (y+5)^2 + (2z-8)^2 = 0$, tentukan nilai $x + y + z$.

A. 11 B. 5 C. 4 D. 2 E. 1

Solusi: [E]

Karena x , y , dan z adalah bilangan real, maka haruslah

$$x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

$$y + 5 = 0 \Leftrightarrow y = -5$$

$$2z - 8 = 0 \Leftrightarrow z = 4.$$

Jadi, nilai $x + y + z = 2 - 5 + 4 = 1$

4. Diberikan $\sqrt{4 + \sqrt{49 + 12\sqrt{10}}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ dengan $a < b$. Nilai dari $b - a$ adalah

A. 7 B. 5 C. 4 D. 3 E. 2

Solusi: [E]

$$\begin{aligned}\sqrt{4 + \sqrt{49 + 12\sqrt{10}}} &= \sqrt{4 + \sqrt{49 + 2\sqrt{360}}} \sqrt{4 + \sqrt{9} + \sqrt{40}} = \sqrt{4 + 3 + 2\sqrt{10}} \\ &= \sqrt{7 + 2\sqrt{10}} = \sqrt{2} + \sqrt{5} = \sqrt{a} + \sqrt{b}\end{aligned}$$

Karenanya $a = 2$ dan $b = 5$, sehingga $b - a = 5 - 2 = 3$.

5. Susunlah berdasarkan urutan terkecil ke terbesar dari

$$A = \sqrt{11}, B = \sqrt[3]{64}, C = \sqrt[6]{4090}.$$

- A. $A < B < C$ C. $C < B < A$ E. $C < A < B$
B. $B < C < A$ D. $A < C < B$

Solusi: [D]

$$A = \sqrt{11}, B = \sqrt[3]{64}, C = \sqrt[6]{4090}$$

$$A^6 = 1331, B^6 = 4096, C^6 = 4090$$

Karena $1331 < 4090 < 4096$, maka susunan dari urutan terkecil ke terbesar adalah $A < C < B$.

6. Diberikan bahwa $7^3 \cdot 2^{12} = x^y$, di mana x dan y adalah bilangan bulat positif, tentukan nilai terkecil yang mungkin dari $x + y$.
A. 34 B. 351 C. 407 D. 900 E. 1800

Solusi: [C]

$$7^3 \cdot (2^4)^3 = 7^3 \cdot 16^3 = 112^3 = x^y$$

Karenanya $x = 112$ dan $y = 3$, sehingga $x + y = 112 + 3 = 115$.

7. Bentuk rasional dari $\frac{m+n}{\sqrt[3]{m} + \sqrt[3]{n}}$ adalah

- A. $\sqrt[3]{m} - \sqrt[3]{n}$ D. $\sqrt[3]{m^2} - \sqrt[3]{n^2}$
B. $\sqrt[3]{m^2} - 2\sqrt[3]{mn} + \sqrt[3]{n^2}$ E. $\sqrt[3]{m^2} + \sqrt[3]{mn} + \sqrt[3]{n^2}$
C. $\sqrt[3]{m^2} - \sqrt[3]{mn} + \sqrt[3]{n^2}$

Solusi: [C]

$$\begin{aligned}\frac{m+n}{\sqrt[3]{m} + \sqrt[3]{n}} &= \frac{m+n}{\sqrt[3]{m} + \sqrt[3]{n}} \times \frac{\sqrt[3]{m^2} - \sqrt[3]{mn} + \sqrt[3]{n^2}}{\sqrt[3]{m^2} - \sqrt[3]{mn} + \sqrt[3]{n^2}} \\ &= \frac{(m+n)(\sqrt[3]{m^2} - \sqrt[3]{mn} + \sqrt[3]{n^2})}{(\sqrt[3]{m})^3 + (\sqrt[3]{n})^3} = \frac{(m+n)(\sqrt[3]{m^2} - \sqrt[3]{mn} + \sqrt[3]{n^2})}{(m+n)} \\ &= \sqrt[3]{m^2} - \sqrt[3]{mn} + \sqrt[3]{n^2}\end{aligned}$$

8. Diberikan $k = \sqrt[3]{81} + 2\sqrt[3]{9} + 4$. Tentukan nilai dari $\left(2 + \frac{1}{k}\right)^3$.

- A. 9 B. 6 C. 4 D. 3 E. 1

Solusi: [A]

Misalnya $a = \sqrt[3]{9}$, sehingga $a^3 = 9$ dan

$$k = \sqrt[3]{81} + 2\sqrt[3]{9} + 4 = (\sqrt[3]{9})^2 + 2\sqrt[3]{9} + 4 = a^2 + 2a + 4.$$

$$\begin{aligned} \left(2 + \frac{1}{k}\right)^3 &= \left(2 + \frac{1}{a^2 + 2a + 4}\right)^3 = \left(2 + \frac{a-2}{a^3 - 8}\right)^3 = \left(2 + \frac{a-2}{9-8}\right)^3 = (2+a-2)^3 \\ &= a^3 = (\sqrt[3]{9})^3 = 9 \end{aligned}$$

9. Bentuk sederhana dari $P(x) = \frac{(x^2 - 3x - 18)(\sqrt{x+1} - 3)(x + 10 + 6\sqrt{x+1})}{(x^2 - 5x - 24)(\sqrt{x+1} + 3)}$

untuk $x = 2010$ adalah

- A. 2016 B. 2010 C. 2006 D. 2004 E. 2002

Solusi: [D]

$$\begin{aligned} P(x) &= \frac{(x^2 - 3x - 18)(\sqrt{x+1} - 3)(x + 10 + 6\sqrt{x+1})}{(x^2 - 5x - 24)(\sqrt{x+1} + 3)} \\ &= \frac{(x^2 - 3x - 18)(\sqrt{x+1} - 3)(x + 10 + 6\sqrt{x+1})(\sqrt{x+1} - 3)}{(x^2 - 5x - 24)(\sqrt{x+1} + 3)(\sqrt{x+1} - 3)} \\ &= \frac{(x^2 - 3x - 18)(x + 10 - 6\sqrt{x+1})(x + 10 + 6\sqrt{x+1})}{(x^2 - 5x - 24)(x - 8)} \\ &= \frac{(x - 6)(x + 3)(x^2 + 20x + 100 - 36x - 36)}{(x - 8)(x + 3)(x - 8)} = \frac{(x - 6)(x^2 - 16x + 64)}{(x - 8)^2} \\ &= \frac{(x - 6)(x - 8)^2}{(x - 8)^2} = x - 6 \end{aligned}$$

$$P(2010) = 2010 - 6 = 2004$$

10. Diberikan $[x]$ adalah bilangan bulat terbesar bukan lebih besar dari pada x .

Jika $a = \left[(\sqrt{3} - \sqrt{2})^{2010} \right] + 16$, tentukan nilai dari a .

- A. 36 B. 24 C. 18 D. 16 E. 6

Solusi: [D]

$$0 < \sqrt{3} - \sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} < 1$$

$$0 < (\sqrt{3} - \sqrt{2})^{2010} < 1 \rightarrow a = \left[(\sqrt{3} - \sqrt{2})^{2010} \right] + 16 = 0 + 16 = 16$$