Solusi Pengayaan Matematika
Edisi 1

Nomor Soal: 1-10

1. Nilai dari $\dfrac{2\times 3^{2011}+4\times 3^{2010}-3^{2009}+8}{29}$ adalah ….

A. $\dfrac{3^{2009}}{29}$ B. 3^{2009} C. 3^{2010} D. 3^{2017} E. $\dfrac{31\times 3^{2009}}{29}$

Solusi: [B]

$$\frac{2\times 3^{2011}+4\times 3^{2010}-3^{2009}+8}{29}=\frac{3^{2009}\left(2\times 3^2+4\times 3-1\right)}{29}=3^{2009}$$

2. Diberikan persamaan $2t\left(x+9\right)=6x-5$ tidak mempunyai penyelesaian, dengan t adalah parameter, tentukan angka satuan dari t^{2009}.

A. 6 B. 5 C. 3 D. 2 E. 1

Solusi: [C]

$2t\left(x+9\right)=6x-5$

$2tx+18t=6x-5$

$\left(2t-6\right)x=-18t-5$

Karena tidak mempunyai penyelesaian, ini mengakibatkan

$2t-6=0$ dan $-18t-5\neq 0$

Karena itu, $t=3$.

Pola angka satuan bilangan 3^n dengan n bilangan asli 3, 9, 7, 1.

Selanjutnya, $t^{2009}=3^{2009}=3^{4\times 502+1}$, sehingga angka satuaannya adalah 3.

3. Diberikan persamaan $ax+7=b-6x$ mempunyai lebih dari satu solusi untuk x. Tentukan nilai dari $\left(7a+6b\right)^{2009}$.

A. -1 B. 0 C. 1 D. 2^{2015} E. -2^{2015}

Solusi: [B]

Kita menuliskan persamaan $ax+7=b-6x$ sebagai $\left(a+6\right)x=b-7$.

Karena persamaan mempunyai lebih dari satu solusi mengakibatkan bahwa

$a+6=0$ dan $b-7=0$

$a=-6$ dan $b=7$

$\left(7a+6b\right)^{2009}=\left[7\left(-6\right)+6\cdot 7\right]^{2009}=0^{2009}=0$

4. Jika penyelesaian dari persamaan $5p - x = \frac{2}{3}x + 8$ adalah 6, berapakah nilai $\left[(-p)^2 + 12(-p) + 36\right]^{2009}$.

A. -1 B. 0 C. 1 D. 11^{2015} E. 11^{4030}

Solusi: [C]

$$x = 6 \to 5p - 13 = \frac{2}{3} \cdot 6 + 8$$

$$5p = 4 + 8 + 13 = 25$$

$$p = \frac{25}{5} = 5$$

$$\left[(-p)^2 + 12(-p) + 36\right]^{2015} = \left(p^2 - 12p^2 + 36\right)^{2009} = (p-6)^{4018} = (5-6)^{4018} = 1$$

5. Jika -3 adalah solusi dari persamaan $\frac{5}{3}ax = -12x - (-3)^4$, maka nilai ekspresi $\left(a^2 - 9a + 1\right)^{2009} = ...$

A. -1 B. 0 C. 1 D. 9^{2015} E. -9^{2015}

Solusi: [D]

$$x = -3 \to \frac{5}{3}ax = -12x - (-3)^4$$

$$\frac{5}{3}(-3)x = -12(-3) - (-3)^4$$

$$-5a = 36 - 81$$

$$-5a = -45$$

$$a = 9$$

$$\therefore \left(a^2 - 9a + 1\right)^{2009} = \left(9^2 - 9 \cdot 9 + 1\right)^{2009} = 1^{2009} = 1$$

6. Jika persamaan $t(4x-1) = 8x - 5$ tidak mempunyai solusi, dengan t adalah parameter, berapakah angka satuan dari t^{2009} ?

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4 E. 5

Solusi: [B]

Dari persamaan $t(4x-1) = 8x - 5$ kita memperoleh $(4t-8)x = t - 5$. Persamaan tidak mempunyai penyelesaian untuk *x*, artinya

$4t - 8 = 0$ dan $t - 5 \neq 0$

Sehingga $t = 2$.

Pola angka satuan dari bilangan 2^n , dengan *n* bilangan asli adalah 2, 4, 8, 6.

Selanjutnya, $t^{2009} = 2^{2009} = 2^{502 \times 4 + 1}$, sehingga angka satuaannya adalah 2.

7. Diberikan persamaan $\frac{21}{5}x-125=k+\frac{11}{3}x$ mempunyai solusi bilangan bulat positif, dengan k adalah juga bilangan bulat positif. Jika yang minimum, maka angka satuan dari k^{2009} adalah ….

A. 8 B. 6 C. 4 D. 3 E. 2

Solusi: [D]

$$\frac{21}{5}x-125=k+\frac{11}{3}x$$

$$k=\frac{21}{5}x-\frac{11}{3}x-125=\frac{8}{15}x-125$$

Karena k adalah bilangan bulat postif, maka $\frac{8}{15}x-125\geq 1$, sehingga $x=15n$ dan $n=\frac{x}{15}\geq\frac{126}{8}=15,75$; sehingga nilai minimum n adalah 16. Dengan demikian, $x=15\times 16=240$ dan $k_{\min}=\frac{8}{15}\cdot 15n-125=8n-125=8\cdot 16-125$ $=128-125=3$.

Selanjutnya, $k^{2009}=3^{2009}=3^{502\times 4+1}$. Karena angka satuan dari 3^n mengikuti pola 3, 9, 7, 1; maka angka satuannya adalah 3.

8. Jika $xy=12$, $xz=18$, dan $yz=24$, dengan x, y, dan z adalah bilangan real positif, tentukan nilai $x^2+y^2+z^2$.

A. 72 B. 61 C. 51 D. 36 E. 25

Solusi: [B]

Perkalian ketiga persamaan menghasilkan

$$(xy)(xz)(yz)=(12)(18)(24)$$

$$(xyz)^2=2^6\times 3^4$$

$$xyz=\pm 2^3 3^2=\pm 72$$

Karena x, y, dan z adalah bilangan real positif, maka $xyz=72$.

$$xy=12\rightarrow 12z=72\Leftrightarrow z=6$$

$$xz=18\rightarrow 18y=72\Leftrightarrow y=4$$

$$yz=24\rightarrow 24x=72\Leftrightarrow x=3$$

$$x^2+y^2+z^2=3^2+4^2+6^2=61$$

9. Diberikan bahwa perbedaan $\sqrt{57-40\sqrt{2}}-\sqrt{57+40\sqrt{2}}$ adalah bilangan bulat. Tentukan bilangan bulat tersebut.

A. 20 B. 14 C. 12 D. 10 E. 4

Solusi: [D]

Gunakan rumus $\left(a-b\right)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$.

Misalnya $x = \sqrt{57-40\sqrt{2}} - \sqrt{57+40\sqrt{2}}$, sehingga

$x^2 = 57 - 40\sqrt{2} + 57 + 40\sqrt{2} + 2\sqrt{\left(57-40\sqrt{2}\right)\left(57+40\sqrt{2}\right)}$

$= 114 - 2\sqrt{3249-3200} = 114 - 2\cdot 7 = 100$

$x = 10$

Jadi, $\sqrt{57-40\sqrt{2}} - \sqrt{57+40\sqrt{2}} = 10$.

10. Tentukan bilangan asli *n*, sedemikian sehingga $2^8 + 2^{10} + 2^n$ adalah bilangan kuadrat sempurna.

A. 20 B. 12 C. 10 D. 8 E. 4

Solusi: [C]

$2^8 + 2^{10} + 2^n = \left(2^{10} + 2\cdot 2^4 \cdot 2^5 + 2^{10}\right) + 2^n - 2^{10} = \left(2^5 + 2^5\right)^2 + 2^n - 2^{10}$

Karena $2^8 + 2^{10} + 2^n$ adalah bilangan kuadrat sempurna, maka haruslah $2^n - 2^{10} = 0$, sehingga

$2^n = 2^{10}$

$n = 10$