

Solusi Pengayaan Matematika

Edisi 1

Nomor Soal: 1-10

1. Angka (digit) satuan dari $\left(\sqrt{4+\sqrt{8}} \times \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} \times \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}\right)^{2007}$

adalah

- A. 7 B. 6 C. 4 D. 3 E. 2

Solusi: [B]

$$\begin{aligned} & \left(\sqrt{4+\sqrt{8}} \times \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} \times \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}\right)^{2007} \\ &= \left[\sqrt{4+\sqrt{8}} \times \sqrt{2^2 - \left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^2}\right]^{2007} \\ &= \left(\sqrt{4+\sqrt{8}} \times \sqrt{4-2-\sqrt{2}}\right)^{2007} = \left(\sqrt{4+2\sqrt{2}} \times \sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^{2007} \\ &= \left(\sqrt{8-4\sqrt{2}+4\sqrt{2}-4}\right)^{2007} = 2^{2007} \end{aligned}$$

Pola angka (digit) satuan dari 2^n dengan n adalah bilangan bulat positif (bilangan asli) adalah 2, 4, 6, 8.

Karena $2^{2007} = 2^{4 \times 501 + 3}$, maka angka satuannya adalah 6.

2. Nilai dari $^{2007}\sqrt{2\sqrt{11}-3\sqrt{5}} \times ^{4014}\sqrt{89+12\sqrt{55}}$ adalah

- A. -2 B. -1 C. 1 D. 2 E. 3

Solusi: [B]

$$\begin{aligned} & ^{2007}\sqrt{2\sqrt{11}-3\sqrt{5}} \times ^{4014}\sqrt{89+12\sqrt{55}} = ^{2007}\sqrt{2\sqrt{11}-3\sqrt{5}} \times ^{4014}\sqrt{89+2\sqrt{1980}} \\ &= ^{2007}\sqrt{2\sqrt{11}-3\sqrt{5}} \times ^{4014}\sqrt{\left(\sqrt{44}+\sqrt{45}\right)^2} = ^{2007}\sqrt{2\sqrt{11}-3\sqrt{5}} \times ^{2007}\sqrt{2\sqrt{11}+3\sqrt{5}} \\ &= ^{2007}\sqrt{\left(2\sqrt{11}\right)^2 - \left(3\sqrt{5}\right)^2} \\ &= ^{2007}\sqrt{44-45} = ^{2007}\sqrt{-1} = -1 \end{aligned}$$

3. Nilai dari $\frac{20072006^2}{20072005^2 + 20072007^2 - 2}$ adalah

- A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. $\frac{3}{2}$ D. 2 E. 4

Solusi: [A]

Gunakan identitas $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{20072006^2}{20072005^2 + 20072007^2 - 2} &= \frac{20072006^2}{20072005^2 - 1 + 20072007^2 - 1} \\ &= \frac{20072006^2}{(20072004)(20072006) + (20072008)(20072006)} \\ &= \frac{20072006^2}{20072006(20072004 + 20072008)} \\ &= \frac{20072006}{2(20072006)} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

4. Jumlah angka-angka hasil dari 256×9999 adalah
 A. 79 B. 72 C. 60 D. 56 E. 36

Solusi: [E]

$$256 \times 9999 = 256 \times (10000 - 1) = 2560000 - 256 = 2559744$$

Jadi, jumlah angka-angkanya adalah $2 + 5 + 5 + 9 + 7 + 4 + 4 = 36$.

5. Nilai dari $\frac{98679}{(-98679)^2 + 98678(-98680)}$ adalah
 A. -98679 B. -1 C. 1 D. 2 E. 98679

Solusi: [E]

Gunakan identitas $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$, sehingga

$$\begin{aligned} \frac{98679}{(-98679)^2 + 98678(-98680)} &= \frac{98679}{98679^2 - (98679 - 1)(98679 + 1)} \\ &= \frac{98679}{98679^2 - (98679^2 - 1)} \\ &= \frac{98679}{98679^2 - 98679^2 + 1} = 98679 \end{aligned}$$

6. Nilai dari $\frac{76^3 + 24^3}{76 \times 52 + 24^2} = \dots$
 A. 24 B. 76 C. 90 D. 100 E. 120

Solusi: [E]

Gunakan identitas $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$, sehingga diperoleh

$$\frac{76^3 + 24^3}{76 \times 52 + 24^2} = \frac{(76 + 24)(76^2 - 76 \times 24 + 24^2)}{76 \times 52 + 24^2}$$

$$= \frac{(100)(76 \times 24 + 24^2)}{76 \times 52 + 24^2} = 100$$

7. Jika $ab < 0$, maka hubungan $(a-b)^2$ dan $(a+b)^2$ adalah
- A. $(a-b)^2 < (a+b)^2$ C. $(a-b)^2 = (a+b)^2$ E. tidak dapat ditentukan
- B. $(a-b)^2 > (a+b)^2$ D. $ab > 0$

Solusi: [B]

$$\text{Dari } (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2 - 4ab = (a+b)^2 - 4ab$$

Karena $ab < 0$, maka pastilah $(a+b)^2 - 4ab > (a+b)^2$ atau

$$(a-b)^2 > (a+b)^2$$

8. Bentuk sederhana dari $\sqrt[3]{45+29\sqrt{2}} + \sqrt[3]{45-29\sqrt{2}}$ adalah
- A. 1 B. 2 C. 4 D. 5 E. 6

Solusi 1: [E]

Gunakan identitas $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$

Misalnya $\sqrt[3]{45+29\sqrt{2}} + \sqrt[3]{45-29\sqrt{2}} = x$, sehingga

$$\left(\sqrt[3]{45+29\sqrt{2}} + \sqrt[3]{45-29\sqrt{2}}\right)^3 = x^3$$

$$90 + 3\sqrt{(45+29\sqrt{2})(45-29\sqrt{2})}\left(\sqrt[3]{45+29\sqrt{2}} + \sqrt[3]{45-29\sqrt{2}}\right) = x^3$$

$$90 + 3\sqrt{2025-1682}(x) = x^3$$

$$90 + 21x = x^3$$

$$x^3 - 21x - 90 = 0$$

$$(x-6)(x^2 + 6x + 15) = 0$$

$x = 6$ (diterima) atau $x^2 + 6x + 15 = 0$ (ditolak, karena bukan bilangan real)

Jadi, $\sqrt[3]{45+29\sqrt{2}} + \sqrt[3]{45-29\sqrt{2}}$ adalah 6.

Solusi 2: [E]

Misalnya $\sqrt[3]{45+29\sqrt{2}} + \sqrt[3]{45-29\sqrt{2}} = x$.

Jika $a = x$, $b = -\sqrt[3]{45+29\sqrt{2}}$, dan $c = -\sqrt[3]{45-29\sqrt{2}}$, maka $a + b + c = 0$.

Gunakan identitas:

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$$

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (0)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$$

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$$

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$$

$$x^3 + \left(-\sqrt[3]{45 + 29\sqrt{2}}\right)^3 + \left(-\sqrt[3]{45 - 29\sqrt{2}}\right)^3$$

$$= x \left(-\sqrt[3]{45 + 29\sqrt{2}}\right) \left(-\sqrt[3]{45 - 29\sqrt{2}}\right)$$

$$x^3 - 45 - 29\sqrt{2} - 45 + 29\sqrt{2} = x^3 \sqrt{2025 - 1628}$$

$$x^3 - 21x - 90 = 0$$

$$(x - 6)(x^2 + 6x + 15) = 0$$

$x = 6$ (diterima) atau $x^2 + 6x + 15 = 0$ (ditolak, karena bukan bilangan real)

Jadi, $\sqrt[3]{45 + 29\sqrt{2}} + \sqrt[3]{45 - 29\sqrt{2}}$ adalah 6.

9. Pemfaktoran dari $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) - 3$ adalah $(ax+bx+c)(px+qx+r)$. Nilai dari $(a+b-c)(p+q+r) = \dots$
 A. 26 B. 39 C. 42 D. 49 E. 57

Solusi: [B]

$$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) - 3 = (x+1)(x+4)(x+2)(x+3) - 3$$

$$= (x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) - 3 \quad (\text{misalnya } x^2 + 5x = y), \text{ sehingga}$$

$$= (y+4)(y+6) - 3 = y^2 + 10y + 24 - 3 = y^2 + 10y + 21 = (y+3)(y+7)$$

$$= (x+5x+3)(x+5x+7)$$

$$\text{Jadi, nilai dari } (a+b-c)(p+q+r) = (1+5-3)(1+5+7) = 3 \cdot 13 = 39$$

10. Pemfaktoran dari $(x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3$ adalah $k(x-y)(y-z)(z-x)$.
 Nilai k adalah
 A. 2 B. 3 C. 6 D. 8 E. 9

Solusi: [B]

Misalnya $a = x - y$, $b = y - z$, dan $c = z - x$, sehingga

$$a + b + c = x - y + y - z + z - x = 0$$

Kita mengetahui bahwa:

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$$

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (0)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$$

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$$

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$$

$$\text{Jadi, faktor dari } (x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3 = 3(x-y)(y-z)(z-x)$$