Solusi Pengayaan Matematika

Edisi 1

Nomor Soal: 1-10

1. Jika $a=\sqrt{5+\sqrt{21}}+\sqrt{8+\sqrt{55}}$ dan $b=\sqrt{7+\sqrt{33}}+\sqrt{6+\sqrt{35}}$, maka nilai $(a-b)^{2006}$ adalah….

   A. -1 B. 0 C. 1 D. 2^{2015} E. -2^{2015}

   Solusi: [B]

   $$a=\sqrt{5+\sqrt{21}}+\sqrt{8+\sqrt{55}}=\sqrt{\frac{20+4\sqrt{21}}{4}}+\sqrt{\frac{32+4\sqrt{55}}{4}}$$

   $$=\frac{1}{2}\sqrt{20+2\sqrt{84}}+\frac{1}{2}\sqrt{32+2\sqrt{220}}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{14}+\sqrt{6}+\sqrt{22}+\sqrt{10}\right)$$

   $$b=\sqrt{7+\sqrt{33}}+\sqrt{6+\sqrt{35}}=\sqrt{\frac{28+4\sqrt{33}}{4}}+\sqrt{\frac{24+4\sqrt{35}}{4}}$$

   $$=\frac{1}{2}\sqrt{28+2\sqrt{132}}+\frac{1}{2}\sqrt{24+2\sqrt{140}}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{22}+\sqrt{6}+\sqrt{14}+\sqrt{10}\right)$$

   Sehingga, $a=b$.

   Jadi, nilai $(a-b)^{2006}=0^{2006}=0$

2. Jika a dan b adalah bilangan bulat positif sehingga $a+\sqrt{b}=\sqrt{15+\sqrt{216}}$, maka nilai $\frac{a}{b}=....$

   A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{2}$ E. $\frac{3}{2}$

   Solusi: [D]

   $a+\sqrt{b}=\sqrt{15+\sqrt{216}}$

   $a^2+b+2a\sqrt{b}=15+\sqrt{216}$

   $\therefore 2a\sqrt{b}=\sqrt{216}$

   $4a^2b=216$

   $a^2b=54$

   $a^2b=9\times 6$

   $\therefore a^2=9$ dan $b=6$

   $a=3$ dan $b=6$

$\therefore\ \frac{a}{b}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

3. Berapakah nilai dari $\sqrt{10+4\sqrt{6}}+\sqrt{10-4\sqrt{6}}$?

A. 1 B. 4 C. $2\sqrt{6}$ D. $\sqrt{8\sqrt{6}}$ E. $8\sqrt{6}$

Solusi 1: [C]

$x=\sqrt{10+4\sqrt{6}}+\sqrt{10-4\sqrt{6}}$ (kedua ruas dikuadratkan)

$x^2=10+4\sqrt{6}+10-4\sqrt{6}+2\sqrt{10^2-\left(4\sqrt{6}\right)^2}=20+2\sqrt{100-96}=20+4=24$

$x=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$

Jadi, nilai dari $\sqrt{10+4\sqrt{6}}-\sqrt{10-4\sqrt{6}}$ adalah $2\sqrt{6}$.

Solusi 2:

$\sqrt{10+4\sqrt{6}}+\sqrt{10-4\sqrt{6}}=\sqrt{10+2\sqrt{24}}+\sqrt{10-2\sqrt{24}}=\sqrt{6}+\sqrt{4}+\sqrt{6}-\sqrt{4}$

$=2\sqrt{6}$

4. Jika $M=\sqrt{1+2006\times2007\times2008\times2009}$ dan jumlah angka-angka dari bilangan M adalah N. Angka satuan dari N^{2006} adalah ....

A. 0 B. 2 C. 3 D. 4 E. 6

Solusi: [E]

Misalnya $n=2006$, sehingga $2007=n+1$, $2008=n+2$, dan $2009=n+3$.

$M=\sqrt{1+2006\times2007\times2008\times2009}$

$=\sqrt{1+n(n+1)(n+2)(n+3)}$

$=\sqrt{1+\left(n^2+3n\right)\left(n^2+3n+2\right)}$ (Misalnya $n^2+3n=x$), sehingga

$=\sqrt{1+x(x+2)}=\sqrt{x^2+2x+1}=x+1=n^2+3n+1$

$=2006^2+3\times2006+1=4.030.054$

Jumlah angka-angka bilangan M adalah $N=4+0+3+0+0+5+4=16$

Jadi, angka satuan dari $N^{2006}=16^{2006}$ adalah 6.

5. Berapakah bilangan rasional sama dengan $\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}$?

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4 E. 5

Solusi: [C]

Misalnya $x=\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}$

Selanjutnya gunakan identitas $(a+b)^3=a^3+b^3-3ab(a+b)$.

$x^3=9+4\sqrt{5}+9-4\sqrt{5}+3\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}\left(\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}\right)$

$x^3 = 18 + 3\sqrt[3]{9^2 - \left(4\sqrt{5}\right)^2}\,(x)$

$x^3 = 18 + 3x\sqrt[3]{81-80}$

$x^3 = 18 + 3x$

$x^3 - 3x - 18 = 0$

$(x-3)(x^2+3x+6) = 0$

3	1	0	–3	–18
		3	9	18
	1	3	6	0

Sehingga hanya 3 satu-satunya bilangan real yang memenuhi.

Jadi, $\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}$ sama dengan 3.

6. Jika $\sqrt{37-20\sqrt{3}} = a^2 + b^2$, dengan $x = a^2$ dan $y = b^2$, maka nilai dari $x + y + \frac{4}{y}$ adalah ....

A. 12 B. 9 C. 7 D. 4 E. 3

Solusi: [C]

$\sqrt{37-20\sqrt{3}} = a^2 + b^2$

$\sqrt{37-2\sqrt{300}} = a^2 + b^2$

$\sqrt{25} - \sqrt{12} = a^2 + b^2$

$5 - 2\sqrt{3} = a^2 + b^2$

$1 + 4 - 2\sqrt{3} = a^2 + b^2$

$1^2 + \left(1-\sqrt{3}\right)^2 = a^2 + b^2$

$x = a^2 = 1$ dan $y = b^2 = \left(1-\sqrt{3}\right)^2 = 4 - 2\sqrt{3}$

$\therefore\ x + y + \frac{4}{y} = 1 + 4 - 2\sqrt{3} + \frac{4}{4-2\sqrt{3}} = 5 - 2\sqrt{3} + \frac{4}{4-2\sqrt{3}} \times \frac{4+2\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}}$

$= 5 - 2\sqrt{3} + \frac{16+8\sqrt{3}}{16-12} = 5 - 2\sqrt{3} + \frac{16+8\sqrt{3}}{4}$

$= 5 - 2\sqrt{3} + 4 + 2\sqrt{3} = 9$

7. Jika $m = \sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{2-\sqrt{3}}$ dan $n = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$, maka nilai $\frac{2006}{mn}$ adalah….

A. $\sqrt{2}$ B. 1003 C. $1003\sqrt{2}$ D. $1003\sqrt{3}$ E. 2006

Solusi: [C]

$m = \sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{2-\sqrt{3}}$

$m^2 = 2 + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} - 2\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)} = 4 - 2\sqrt{4-3} = 4 - 2 = 2$

$m = \sqrt{2}$

Gunakan identitas $(p-q)^3 = p^3 - q^3 - 3pq(p-q)$.

$n = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$

$n^3 = 2+\sqrt{5}+2-\sqrt{5}+3\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\right)\sqrt[3]{\left(2+\sqrt{5}\right)\left(2-\sqrt{5}\right)}$

$n^3 = 4+3(n)\sqrt[3]{4-5}$

$n^3 = 4-3n$

$n^3 + 3n - 4 = 0$

$(n-1)\left(n^2+n+4\right) = 0$

$n = 1(\text{diterima}) \vee n^2 + n + 4 = 0(\text{akar- akarnyatidakreal, karena } D < 0)$

Jadi, $\frac{2006}{mn} = \frac{2006}{\sqrt{2}\cdot 1} = 1003\sqrt{2}$

8. Bentuk sederhana dari $\sqrt{\left(10^{12}+400\right)^2 - \left(10^{12}-400\right)^2}$.

A. 10^7 B. 10^6 C. 10^5 D. 10^4 E. 10^3

Solusi: [A]

$\sqrt{\left(10^{12}+400\right)^2 - \left(10^{12}-400\right)^2}$

$= \sqrt{\left[\left(10^{12}+400\right)+\left(10^{12}-400\right)\right]\left[\left(10^{12}+400\right)-\left(10^{12}-400\right)\right]} = \sqrt{\left(2\cdot 10^{12}\right)(800)}$

$= 40\cdot 10^6 = 4\times 10^7$

9. Nilai dari $\sqrt[3]{2+\frac{10\sqrt{3}}{9}} + \sqrt[3]{2-\frac{10\sqrt{3}}{9}}$ adalah ….

A. 10 B. 9 C. 3 D. 2 E. 1

Solusi: [D]

Gunakan identitas $(p-q)^3 = p^3 - q^3 - 3pq(p-q)$.

Misalnya $\sqrt[3]{2+\frac{10\sqrt{3}}{9}} + \sqrt[3]{2-\frac{10\sqrt{3}}{9}} = x$, sehingga

$\left(\sqrt[3]{2+\frac{10\sqrt{3}}{9}} + \sqrt[3]{2-\frac{10\sqrt{3}}{9}}\right)^3 = x^3$

$2+\frac{10\sqrt{3}}{9} + 3\sqrt[3]{\left(2+\frac{10\sqrt{3}}{9}\right)\left(2-\frac{10\sqrt{3}}{9}\right)}\left(\sqrt[3]{2+\frac{10\sqrt{3}}{9}} - \sqrt[3]{2-\frac{10\sqrt{3}}{9}}\right) + 2 - \frac{10\sqrt{3}}{9} = x^3$

$4 + 3\sqrt[3]{\left(4-\frac{100}{27}\right)}(x) = x^3$

$4+3x\sqrt[3]{\frac{8}{27}}=x^3$

$4+3x\times\frac{2}{3}=x^3$

$4+2x=x^3$

$x^3-2x-4=0$

$(x-2)(x^2+2x-2)=0$

$x-2=0$ atau $x^2+2x-2=0$

$x=2$ (diterima) atau $x=-1\pm\sqrt{3}$ (ditolak, karena haruslah $x>1$)

Jadi, nilai dari $\sqrt[3]{2+\frac{10}{9}\sqrt{3}}+\sqrt[3]{2-\frac{10}{9}\sqrt{3}}=2$.

10. Jika $\sqrt{17-12\sqrt{2}}=a+b\sqrt{2}$ dan $\sqrt{\frac{4-2\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}}}=c+d\sqrt{2}$, maka angka satuan dari $\left(a+b+c+d\right)^{2006}$ adalah ….

A. 0 B. 1 C. 5 D. 6 E. 8

Solusi: [C]

$\sqrt{17-12\sqrt{2}}=a+b\sqrt{2}$

$\sqrt{17-2\sqrt{72}}=a+b\sqrt{2}$

$\sqrt{9}+\sqrt{8}=a+b\sqrt{2}$

$3+2\sqrt{2}=a+b\sqrt{2}$

Berarti $a=3$ dan $b=2$.

$\sqrt{\frac{4-2\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}}}=c+d\sqrt{2}$

$\sqrt{\frac{4-2\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}}\times\frac{4-2\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}}}=c+d\sqrt{2}$

$\sqrt{\frac{\left(4-2\sqrt{2}\right)^2}{16-8}}=c+d\sqrt{2}$

$\left(4-2\sqrt{2}\right)\sqrt{\frac{1}{8}}=c+d\sqrt{2}$

$\frac{4-2\sqrt{2}}{4}\cdot\sqrt{2}=c+d\sqrt{2}$

$\frac{4\sqrt{2}-4}{4}=c+d\sqrt{2}$

$-1+\sqrt{2}=c+d\sqrt{2}$

Berarti $c=-1$ dan $d=1$.

Jadi, angka satuan dari $\left(a+b+c+d\right)^{2006}=\left(3+2-1+1\right)^{2006}=5^{2006}$ adalah 5.