

Solusi Pengayaan Matematika

Edisi 16

Nomor Soal: 151-160

151. Jika $\tan x = \frac{1 + \sin \frac{\pi}{2005} - \cos \frac{2\pi}{2005}}{\cos \frac{\pi}{2005} + \sin \frac{2\pi}{2005}}$, maka nilai x adalah

- A. $\frac{\pi}{5}$ B. $\frac{\pi}{401}$ C. $\frac{\pi}{1002,5}$ D. $\frac{\pi}{2005}$ E. $\frac{2\pi}{2005}$

Solusi: [D]

$$\begin{aligned} \tan x &= \frac{1 + \sin \frac{\pi}{2005} - \cos \frac{2\pi}{2005}}{\cos \frac{\pi}{2005} + \sin \frac{2\pi}{2005}} = \frac{1 + \sin \frac{\pi}{2005} - 1 + 2\sin^2 \frac{\pi}{2005}}{\cos \frac{\pi}{2005} + 2\sin \frac{\pi}{2005} \cos \frac{\pi}{2005}} \\ &= \frac{\sin \frac{\pi}{2005} \left(1 + 2\sin \frac{\pi}{2005}\right)}{\cos \frac{\pi}{2005} \left(1 + 2\sin \frac{\pi}{2005}\right)} = \tan \frac{\pi}{2005} \end{aligned}$$

$$x = \frac{\pi}{2005} + k\pi, \text{ dengan } k \in B$$

Jika $k = 0$, maka $x = \frac{\pi}{2005}$.

152. Jika $\cot x + \tan x = a$, maka nilai $\cot^2 x + \tan^2 x = \dots$

- A. $a^2 + 2$ B. $a^2 + 1$ C. a^2 D. $a^2 - 1$ E. $a^2 - 2$

Solusi: [E]

Kita mengetahui bahwa $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$ dan $\cot x \tan x = 1$, sehingga

$$\cot^2 x + \tan^2 x = (\cot x + \tan x)^2 - 2\cot x \tan x = a^2 - 2$$

153. Tiang bendera diletakkan di puncak gedung, sehingga puncak dan dasar tiang terlihat oleh pengamat dengan sudut θ , dengan $\tan \theta = \frac{1}{5}$. Jika tinggi gedung

adalah 40 meter dan jarak pengamat ke dinding gedung adalah 50 meter, tentukan panjang tiang bendera.

- A. $19\frac{11}{21}$ m B. $18\frac{11}{21}$ m C. $16\frac{11}{21}$ m D. $10\frac{11}{21}$ m E. $9\frac{11}{21}$ m

Solusi: [A]

Misalnya panjang tiang bendera adalah $CD = x$.

$$\tan(\alpha + \theta) = \frac{40 + x}{50}$$

$$\frac{\tan \alpha + \tan \theta}{1 - \tan \alpha \tan \theta} = \frac{40 + x}{50}$$

$$\frac{\frac{40}{50} + \frac{1}{5}}{1 - \frac{40}{50} \times \frac{1}{5}} = \frac{40 + x}{50}$$

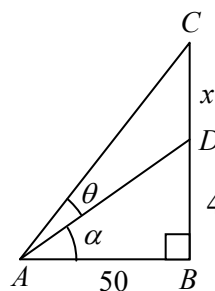
$$\frac{200 + 50}{250 - 40} = \frac{40 + x}{50}$$

$$\frac{250}{210} = \frac{40 + x}{50}$$

$$840 + 21x = 1250$$

$$21x = 410$$

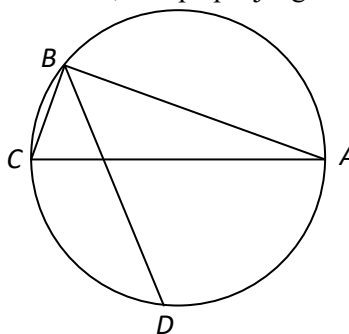
$$x = \frac{410}{21} = 19\frac{11}{21}$$



Jadi, panjang tiang bendera adalah $19\frac{11}{21}$ m.

154. Titik-titik $A, B, C,$ dan D terletak pada keliling lingkaran. AC adalah diameter dan $\angle CBD = \angle DBA$. Jika $CB = 2$ dan $AB = 4$, berapa panjang BD ?

- A. $4\sqrt{3}$
- B. $4\sqrt{2}$
- C. $3\sqrt{3}$
- D. $3\sqrt{2}$
- E. $2\sqrt{3}$



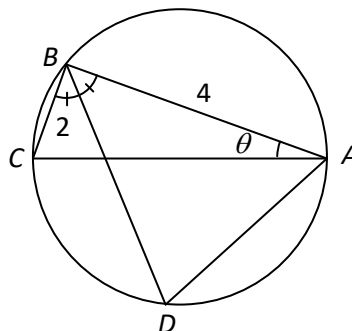
Solusi: [D]

AC diameter, $\angle ABC = 90^\circ$, dan $\angle CBD = \angle DBA = 45^\circ$.

Karena $\angle CAD$ dan $\angle CBD$ dan sama-sama menghadap busur BC , maka $\angle CAD = \angle CBD = 45^\circ$

Menurut Teorema Pythagoras

$$AC = \sqrt{BC^2 + AB^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$$



Misalnya $\angle BAC = \theta$, sehingga nilai

$$\sin \theta = \frac{BC}{AC} = \frac{2}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

$$\cos \angle CAD = \frac{AD}{AC}$$

$$AD = AC \cos \angle CAD = AC \cos 45^\circ$$

Menurut Aturan Sinus:

$$\frac{BD}{\sin \angle BAD} = \frac{AD}{\sin \angle ABD}$$

$$\frac{BD}{\sin(45^\circ + \theta)} = \frac{AC \cos 45^\circ}{\sin 45^\circ}$$

$$BD = 2\sqrt{5} \sin(45^\circ + \theta) = 2\sqrt{5}(\sin 45^\circ \cos \theta + \cos 45^\circ \sin \theta)$$

$$= 2\sqrt{5} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{5}} \right) = 2\sqrt{5} \left(\frac{3}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \right) = 3\sqrt{2}$$

155. Tentukan nilai eksak dari hasil kali $\cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7}$.

- A. $-\frac{1}{2}$ B. $-\frac{1}{3}$ C. $-\frac{1}{8}$ D. $\frac{1}{18}$ E. $\frac{1}{21}$

Solusi: [C]

$$\begin{aligned} \cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} &= \frac{2 \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7}}{2 \sin \frac{\pi}{7}} = \frac{2 \sin \frac{2\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7}}{4 \sin \frac{\pi}{7}} \\ &= \frac{2 \sin \frac{4\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7}}{8 \sin \frac{\pi}{7}} = \frac{\sin \frac{8\pi}{7}}{8 \sin \frac{\pi}{7}} = \frac{\sin \left(\pi + \frac{\pi}{7} \right)}{8 \sin \frac{\pi}{7}} = \frac{-\sin \frac{\pi}{7}}{8 \sin \frac{\pi}{7}} \\ &= -\frac{1}{8} \end{aligned}$$

156. Dalam $\triangle ABC$ diketahui bahwa $3 \sin A + 4 \cos B = 6$ dan $4 \sin B + 3 \cos A = 1$. Nilai $1 + \cot^2 C$ adalah

- A. 2 B. 3 C. 4 D. $3\sqrt{3}$ E. $4\sqrt{3}$

Solusi: [A]

$$3 \sin A + 4 \cos B = 6$$

$$9 \sin^2 A + 16 \cos^2 B + 24 \sin A \cos B = 36 \dots (1)$$

$$4 \sin B + 3 \cos A = 1$$

$$16 \sin^2 B + 9 \cos^2 A + 24 \cos A \sin B = 1 \dots (2)$$

Jumlah persamaan (1) dan (2) menghasilkan

$$9(\sin^2 A + \cos^2 A) + 16(\sin^2 B + \cos^2 B) + 24(\sin A \cos B + \cos A \sin B) = 37$$

$$9(1) + 16(1) + 24\sin(A+B) = 37$$

$$24\sin(A+B) = 12$$

$$\sin(A+B) = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$$

$$A+B = 30^\circ \text{ atau } 150^\circ$$

$$C = 150^\circ \text{ atau } 30^\circ$$

Untuk $A < 30^\circ$, maka $3\sin A + 4\cos B = 6$ sehingga $\frac{3}{2} + 4 < 6$

Karenanya besar sudut C adalah 30° .

$$1 + \cot^2 C = 1 + \cot^2 30^\circ = 1 + (\sqrt{3})^2 = 1 + 3 = 4$$

157. Jika nilai minimum fungsi $f(x) = \cos^4 x - \sin^4 x - 2k(1 + \cos x)$ adalah $-\frac{1}{2}$,

maka nilai k adalah ...

A. $-2 + \sqrt{3}$ B. $-1 - \sqrt{3}$ C. -2 D. $-2 - \sqrt{3}$ E. $2 - \sqrt{3}$

Solusi: [D]

$$f(x) = \cos^4 x - \sin^4 x - 2k(1 + \cos x)$$

$$f(x) = (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) - 2k(1 + \cos x)$$

$$f(x) = 2\cos^2 x - 1 - 2k - 2k\cos x$$

$$f(x) = 2\left(\cos x - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{2} - 2a - 1$$

dan dengan mempertimbangkan kasus berikut.

Kasus 1:

Jika $k > 2$, maka $f(x)$ memberikan minimum $1 - 4k$ untuk $\cos x = 1$.

Kasus 2:

Jika $k < -2$, maka $f(x)$ memberikan minimum 1 untuk $\cos x = -1$.

Kasus 3:

Jika $-2 \leq k \leq 2$, maka $f(x)$ memberikan minimum $-\frac{k^2}{2} - 2k - 1$ untuk

$$\cos x = \frac{k}{2}.$$

Dalam dua kasus pertama minimum $f(x)$ tidak dapat menjadi $-\frac{1}{2}$.

Sehingga kita mempunyai

lingkaran juga menyinggung kaki dan hipotenusa segitiga tersebut. Tentukan jari-jari lingkaran tersebut.

- A. 10 B. 9 C. 8 D. 6 E. 5

Solusi: [E]

$$\tan B = \frac{2 \tan \frac{B}{2}}{1 - \tan^2 \frac{B}{2}}$$

$$\frac{28}{21} = \frac{4}{3} = \frac{2 \tan \frac{B}{2}}{1 - \tan^2 \frac{B}{2}}$$

$$2 - 2 \tan^2 \frac{B}{2} = 3 \tan \frac{B}{2}$$

$$2 \tan^2 \frac{B}{2} + 3 \tan \frac{B}{2} - 2 = 0$$

$$\left(2 \tan \frac{B}{2} - 1 \right) \left(\tan \frac{B}{2} + 2 \right) = 0$$

$$\tan \frac{B}{2} = \frac{1}{2} \text{ (diterima) atau } \tan \frac{B}{2} = -2 \text{ (ditolak)}$$

$$\tan \frac{B}{2} = \frac{QY}{BY}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{r}{BY}$$

$$BY = 2r$$

$$\tan A = \frac{2 \tan \frac{A}{2}}{1 - \tan^2 \frac{A}{2}}$$

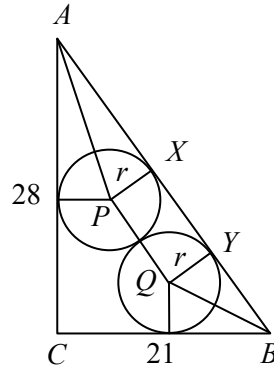
$$\frac{21}{28} = \frac{3}{4} = \frac{2 \tan \frac{A}{2}}{1 - \tan^2 \frac{A}{2}}$$

$$3 - 3 \tan^2 \frac{A}{2} = 8 \tan \frac{A}{2}$$

$$3 \tan^2 \frac{A}{2} + 8 \tan \frac{A}{2} - 3 = 0$$

$$\left(3 \tan \frac{A}{2} - 1 \right) \left(\tan \frac{A}{2} + 3 \right) = 0$$

$$\tan \frac{A}{2} = \frac{1}{3} \text{ (diterima) atau } \tan \frac{A}{2} = -3 \text{ (ditolak)}$$



$$\tan \frac{A}{2} = \frac{PX}{AX}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{r}{AX}$$

$$AX = 3r$$

$$AB = AX + XY + BX$$

$$35 = 3r + 2r + 2r$$

$$7r = 35$$

$$r = 5$$

160. Dalam trapesium $ABCD$, $AB \parallel CD$, $\angle A$ adalah sudut siku-siku, $AB = 8$, $AD = 34$, $CD = 24$, dan titik E terletak pada AD sedemikian sehingga besar $\angle AEB$ adalah setengah besar $\angle CED$. Tentukan panjang AE .

A. 12 B. 14 C. 15 D. 16 E. 18

Solusi: [D]

Misalnya $\angle AEB = \alpha$ dan $\angle CED = 2\alpha$. $AE = x$ dan $DE = 34 - x$.

$$\tan \alpha = \frac{8}{x}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{24}{34 - x}$$

$$\frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{24}{34 - x}$$

$$\frac{2 \cdot \frac{8}{x}}{1 - \left(\frac{8}{x}\right)^2} = \frac{24}{34 - x}$$

$$\frac{16x}{x^2 - 64} = \frac{24}{34 - x}$$

$$\frac{2x}{x^2 - 64} = \frac{3}{34 - x}$$

$$68x - 2x^2 = 3x^2 - 192$$

$$5x^2 - 68x - 192 = 0$$

$$(5x + 12)(x - 16) = 0$$

$$x = -\frac{12}{5} \text{ (ditolak) atau } x = 16 \text{ (diterima)}$$

Jadi, panjang AE adalah 16.

