Solusi Pengayaan Matematika
Edisi 16

Nomor Soal: 151-160

151. Jika $\tan x = \dfrac{1+\sin\frac{\pi}{2005}-\cos\frac{2\pi}{2005}}{\cos\frac{\pi}{2005}+\sin\frac{2\pi}{2005}}$, maka nilai x adalah ....

A. $\dfrac{\pi}{5}$ B. $\dfrac{\pi}{401}$ C. $\dfrac{\pi}{1002,5}$ D. $\dfrac{\pi}{2005}$ E. $\dfrac{2\pi}{2005}$

Solusi: [D]

$$\tan x = \frac{1+\sin\frac{\pi}{2005}-\cos\frac{2\pi}{2005}}{\cos\frac{\pi}{2005}+\sin\frac{2\pi}{2005}} = \frac{1+\sin\frac{\pi}{2005}-1+2\sin^2\frac{\pi}{2005}}{\cos\frac{\pi}{2005}+2\sin\frac{\pi}{2005}\cos\frac{\pi}{2005}}$$

$$= \frac{\sin\frac{\pi}{2005}\left(1+2\sin\frac{\pi}{2005}\right)}{\cos\frac{\pi}{2005}\left(1+2\sin\frac{\pi}{2005}\right)} = \tan\frac{\pi}{2005}$$

$x = \dfrac{\pi}{2005} + k\pi$, dengan $k \in B$

Jika $k = 0$, maka $x = \dfrac{\pi}{2005}$.

152. Jika $\cot x + \tan x = a$, maka nilai $\cot^2 x + \tan^2 x = ...$

A. a^2+2 B. a^2+1 C. a^2 D. a^2-1 E. a^2-2

Solusi: [E]

Kita mengetahui bahwa $a^2+b^2 = (a+b)^2 - 2ab$ dan $\cot x \tan x = 1$, sehingga

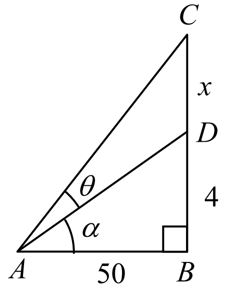
$\cot^2 x + \tan^2 x = (\cot x + \tan x)^2 - 2\cot x \tan x = a^2 - 2$

153. Tiang bendera diletakkan di puncak gedung, sehingga puncak dan dasar tiang terlihat oleh pengamat dengan sudut θ, dengan $\tan\theta = \dfrac{1}{5}$. Jika tinggi gedung adalah 40 meter dan jarak pengamat ke dinding gedung adalah 50 meter, tentukan panjang tiang bendera.

A. $19\dfrac{11}{21}$ m B. $18\dfrac{11}{21}$ m C. $16\dfrac{11}{21}$ m D. $10\dfrac{11}{21}$ m E. $9\dfrac{11}{21}$ m

Solusi: [A]

Misalnya panjang tiang bendera adalah $CD = x$.



$$\tan(\alpha+\theta)=\frac{40+x}{50}$$

$$\frac{\tan\alpha+\tan\theta}{1-\tan\alpha\tan\theta}=\frac{40+x}{50}$$

$$\frac{\frac{40}{50}+\frac{1}{5}}{1-\frac{40}{50}\times\frac{1}{5}}=\frac{40+x}{50}$$

$$\frac{200+50}{250-40}=\frac{40+x}{50}$$

$$\frac{250}{210}=\frac{40+x}{50}$$

$$840+21x=1250$$

$$21x=410$$

$$x=\frac{410}{21}=19\frac{11}{21}$$

Jadi, panjang tiang bendera adalah $19\frac{11}{21}$ m.

154. Titik-titik *A*, *B*, *C*, dan *D* terletak pada keliling lingkaran. *AC* adalah diameter dan $\angle CBD = \angle DBA$. Jika $CB = 2$ dan $AB = 4$, berapa panjang *BD*?

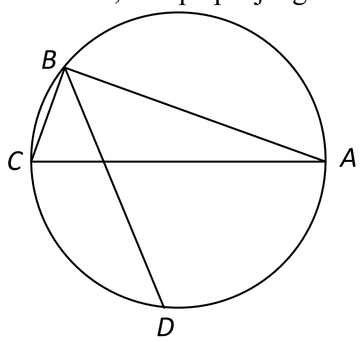
A. $4\sqrt{3}$

B. $4\sqrt{2}$

C. $3\sqrt{3}$

D. $3\sqrt{2}$

E. $2\sqrt{3}$



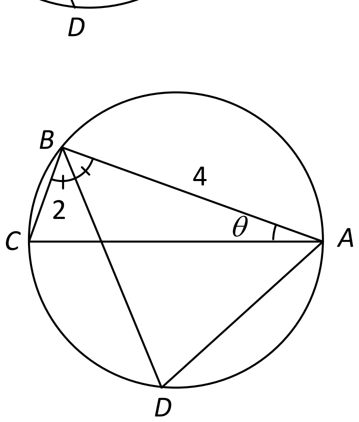
Solusi: [D]

AC diameter , $\angle ABC = 90°$, dan $\angle CBD = \angle DBA = 45°$.

Karena $\angle CAD$ dan $\angle CBD$ dan sama-sama menghadap busur *BC*, maka $\angle CAD = \angle CBD = 45°$

Menurut Teorema Pythagoras

$$AC=\sqrt{BC^2+AB^2}=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$$



Misalnya $\angle BAC = \theta$, sehingga nilai

$$\sin\theta = \frac{BC}{AC} = \frac{2}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

$$\cos\angle CAD = \frac{AD}{AC}$$

$$AD = AC\cos\angle CAD = AC\cos 45^\circ$$

Menurut Aturan Sinus:

$$\frac{BD}{\sin\angle BAD} = \frac{AD}{\sin\angle ABD}$$

$$\frac{BD}{\sin(45^\circ+\theta)} = \frac{AC\cos 45^\circ}{\sin 45^\circ}$$

$$BD = 2\sqrt{5}\sin(45^\circ+\theta) = 2\sqrt{5}(\sin 45^\circ\cos\theta + \cos 45^\circ\sin\theta)$$

$$= 2\sqrt{5}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = 2\sqrt{5}\left(\frac{3}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right) = 3\sqrt{2}$$

155. Tentukan nilai eksak dari hasil kali $\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}$.

A. $-\frac{1}{2}$ B. $-\frac{1}{3}$ C. $-\frac{1}{8}$ D. $\frac{1}{18}$ E. $\frac{1}{21}$

Solusi: [C]

$$\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7} = \frac{2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}} = \frac{2\sin\frac{2\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}}{4\sin\frac{\pi}{7}}$$

$$= \frac{2\sin\frac{4\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}}{8\sin\frac{\pi}{7}} = \frac{\sin\frac{8\pi}{7}}{8\sin\frac{\pi}{7}} = \frac{\sin\left(\pi+\frac{\pi}{7}\right)}{8\sin\frac{\pi}{7}} = \frac{-\sin\frac{\pi}{7}}{8\sin\frac{\pi}{7}}$$

$$= -\frac{1}{8}$$

156. Dalam ΔABC diketahui bahwa $3\sin A + 4\cos B = 6$ dan $4\sin B + 3\cos A = 1$. Nilai $1+\cot^2 C$ adalah ....

A. 2 B. 3 C. 4 D. $3\sqrt{3}$ E. $4\sqrt{3}$

Solusi: [A]

$$3\sin A + 4\cos B = 6$$

$$9\sin^2 A + 16\cos^2 B + 24\sin A\cos B = 36 \text{ .... (1)}$$

$$4\sin B + 3\cos A = 1$$

$$16\sin^2 B + 9\cos^2 A + 24\cos A\sin B = 1 \text{ .... (2)}$$

Jumlah persamaan (1) dan (2) menghasilkan

$9\left(\sin^2 A+\cos^2 A\right)+16\left(\sin^2 B+\cos^2 B\right)+24\left(\sin A\cos B+\cos A\sin B\right)=37$

$9(1)+16(1)+24\sin(A+B)=37$

$24\sin(A+B)=12$

$\sin(A+B)=\frac{12}{24}=\frac{1}{2}$

$A+B=30°\text{ atau }150°$

$C=150°\text{ atau }30°$

Untuk $A<30°$, maka $3\sin A+4\cos B=6$ sehingga $\frac{3}{2}+4<6$

Karenanya besar sudut C adalah $30°$.

$1+\cot^2 C=1+\cot^2 30°=1+\left(\sqrt{3}\right)^2=1+3=4$

157. Jika nilai minimum fungsi $f(x)=\cos^4 x-\sin^4 x-2k(1+\cos x)$ adalah $-\frac{1}{2}$, maka nilai k adalah ....

A. $-2+\sqrt{3}$ B. $-1-\sqrt{3}$ C. -2 D. $-2-\sqrt{3}$ E. $2-\sqrt{3}$

Solusi: [D]

$f(x)=\cos^4 x-\sin^4 x-2k(1+\cos x)$

$f(x)=\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)-2k(1+\cos x)$

$f(x)=2\cos^2 x-1-2k-2k\cos x$

$f(x)=2\left(\cos x-\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{2}-2a-1$

dan dengan mempertimbangkan kasus berikut.

Kasus 1:

Jika $k>2$, maka $f(x)$ memberikan minimum $1-4k$ untuk $\cos x=1$.

Kasus 2:

Jika $k<-2$, maka $f(x)$ memberikan minimum 1 untuk $\cos x=-1$.

Kasus 3:

Jika $-2\le k\le 2$, maka $f(x)$ memberikan minimum $-\frac{k^2}{2}-2k-1$ untuk $\cos x=\frac{k}{2}$.

Dalam dua kasus pertama minimum $f(x)$ tidak dapat menjadi $-\frac{1}{2}$.

Sehingga kita mempunyai

$$-\frac{k^2}{2}-2k-1=-\frac{1}{2}$$

$$k^2+4k+1=0$$

$$k=\frac{-4\pm\sqrt{16-4}}{2}=\frac{-4\pm 2\sqrt{3}}{2}=-2\pm\sqrt{3}$$

Dalam interval $\left[-2,2\right]$, kita memperoleh $k=-2+\sqrt{3}$.

158. Misalnya *a*, *b*, dan *c* adalah tiga bilangan berurutan dalam barisan geometri yang menunjukkan panjang sisi-sisi di depan sudut *A*, *B*, dan *C* dari ΔABC. Jika $x=\frac{\sin A+\cos A\tan C}{\sin B+\cos B\tan C}$, maka penyelesaian nilai yang mungkin untuk *x* adalah ....

A. $x>0$

B. $0<x<\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

C. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}<x<\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

D. $x<\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

E. $x<\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

Solusi: [B]

Misalnya rasio antara *a*, *b*, *c* adalah *r*, maka $b=ar$ dan $c=ar^2$.

$$x=\frac{\sin A+\cos A\tan C}{\sin B+\cos B\tan C}=\frac{\sin A+\cos A\frac{\sin C}{\cos C}}{\sin B+\cos B\frac{\sin C}{\cos C}}=\frac{\sin A\cos C+\cos A\sin C}{\sin B\cos C+\cos B\sin C}$$

$$=\frac{\sin(A+C)}{\sin(B+C)}=\frac{\sin(\pi-B)}{\sin(\pi-A)}=\frac{\sin B}{\sin A}=\frac{b}{a}=\frac{ar}{a}=r$$

Di sini kita hanya memerlukan untuk menghitung interval (range) dari *r*.
Karena *a*, *b*, *c* adalah barisan geometri, panjang maksimum hanya *a* atau *c*.
Juga karena *a*, *b*, *c* adalah panjang tiga sisi segitiga, mereka memenuhi hubungan $a+b>c$ dan $b+c>a$.

Sehingga $\begin{cases}a+ar>ar^2\\ ar+ar^2>a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}r^2-r-1<0\\ r^2+r-1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1-\sqrt{5}}{2}<r<\frac{\sqrt{5}+1}{2}\\ r<-\frac{\sqrt{5}+1}{2}\text{ atau } r>\frac{\sqrt{5}-1}{2}\end{cases}$

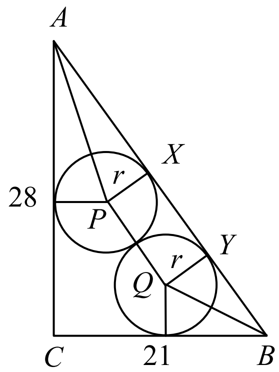
Jadi, interval (range) dari *x* atau *r* adalah $\frac{\sqrt{5}-1}{2}<r<\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ atau $\frac{\sqrt{5}-1}{2}<x<\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

159. Suatu segitiga mempunyai panjang sisi-sisinya 21, 28, dan 35. Di dalam segitiga tersebut terdapat dua lingkaran yang saling bersinggungan dan kedua

lingkaran juga menyinggung kaki dan hipotenusa segitiga tersebut. Tentukan jari-jari lingkaran tersebut.

A. 10 B. 9 C. 8 D. 6 E. 5

Solusi: [E]



$$\tan B = \frac{2\tan\frac{B}{2}}{1-\tan^2\frac{B}{2}}$$

$$\frac{28}{21} = \frac{4}{3} = \frac{2\tan\frac{B}{2}}{1-\tan^2\frac{B}{2}}$$

$$2-2\tan^2\frac{B}{2} = 3\tan\frac{B}{2}$$

$$2\tan^2\frac{B}{2} + 3\tan\frac{B}{2} - 2 = 0$$

$$\left(2\tan\frac{B}{2} - 1\right)\left(\tan\frac{B}{2} + 2\right) = 0$$

$$\tan\frac{B}{2} = \frac{1}{2} \text{ (diterima) atau } \tan\frac{B}{2} = -2 \text{ (ditolak)}$$

$$\tan\frac{B}{2} = \frac{QY}{BY}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{r}{BY}$$

$$BY = 2r$$

$$\tan A = \frac{2\tan\frac{A}{2}}{1-\tan^2\frac{A}{2}}$$

$$\frac{21}{28} = \frac{3}{4} = \frac{2\tan\frac{A}{2}}{1-\tan^2\frac{A}{2}}$$

$$3-3\tan^2\frac{A}{2} = 8\tan\frac{A}{2}$$

$$3\tan^2\frac{A}{2} + 8\tan\frac{A}{2} - 3 = 0$$

$$\left(3\tan\frac{A}{2} - 1\right)\left(\tan\frac{A}{2} + 3\right) = 0$$

$$\tan\frac{A}{2} = \frac{1}{3} \text{ (diterima) atau } \tan\frac{A}{2} = -3 \text{ (ditolak)}$$

$$\tan\frac{A}{2}=\frac{PX}{AX}$$

$$\frac{1}{3}=\frac{r}{AX}$$

$$AX=3r$$

$$AB=AX+XY+BX$$

$$35=3r+2r+2r$$

$$7r=35$$

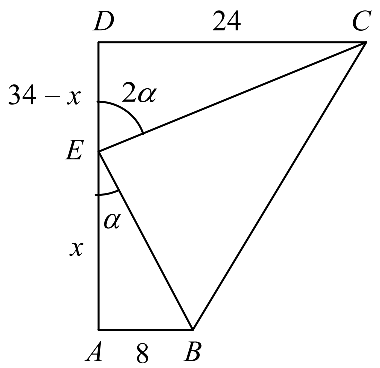
$$r=5$$

160. Dalam trapesium $ABCD$, $AB//CD$, $\angle A$ adalah sudut siku-siku, $AB=8$, $AD=34$, $CD=24$, dan titk E terletak pada AD sedemikian sehingga besar $\angle AEB$ adalah setengah besar $\angle CED$. Tentukan panjang AE .

A. 12 B. 14 C. 15 D. 16 E. 18

Solusi: [D]

Misalnya $\angle AEB=\alpha$ dan $\angle CED=2\alpha$. $AE=x$ dan $DE=17-x$.



$$\tan\alpha=\frac{8}{x}$$

$$\tan 2\alpha=\frac{24}{34-x}$$

$$\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{24}{34-x}$$

$$\frac{2\cdot\frac{8}{x}}{1-\left(\frac{8}{x}\right)^2}=\frac{24}{34-x}$$

$$\frac{16x}{x^2-64}=\frac{24}{34-x}$$

$$\frac{2x}{x^2-64}=\frac{3}{34-x}$$

$$68x-2x^2=3x^2-192$$

$$5x^2-68x-192=0$$

$$(5x+12)(x-16)=0$$

$x=-\frac{12}{5}$ (ditolak) atau $x=16$ (diterima)

Jadi, panjang AE adalah 16.