# Solusi Pengayaan Matematika
## Edisi 14

## Nomor Soal: 131-140

131. Jika $a$ adalah sisanya dari $\frac{2^{2004}}{7}$ dan $b$ adalah sisanya dari $\frac{2^{2005}}{7}$, maka nilai $a+b=....$

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4 E. 5

**Solusi: [C]**

Perhatikan pola berikut ini.

$2^1$ : 7 sisa 2

$2^2$ : 7 sisa 4

$2^3$ : 7 sisa 1

$2^4$ : 7 sisa 2

$2^5$ : 7 sisa 4

$2^6$ : 7 sisa 1

$2^7$ : 7 sisa 2

Jika diteruskan kita akan mendapatkan sisa dengan formasi 2-4-1, sehingga

$\frac{2^{2004}}{7}=\frac{\left(2^3\right)^{668}}{7}=\text{sisa}\,1$, berarti $a=1$

$\frac{2^{2005}}{7}=\frac{\left(2^3\right)^{668}2}{7}\text{sisa}\,2$, berarti $b=2$

Jadi, nilai $a+b=1+2=3$

132. $N$ adalah bilangan yang terletak antara 900 dan 1000 dan berturut-turut meninggalkan sisa 4 dan 10, jika dibagi dengan 9 dan 11. Jumlah angka-angka dari $N$ adalah ….

A. 20 B. 21 C. 22 D. 24 E. 27

**Solusi: [C]**

Misalnya bilangan tersebut adalah $9xy$, sehingga

$\frac{9xy}{9}=a+\frac{4}{9}\rightarrow 9xy=9a+4$ …. (1)

$\frac{9xy}{11}=b+\frac{10}{11}\rightarrow 9xy=11b+10$ …. (2)

Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh

$9a+4=11b+10$

$9a=11b+6$

Persamaan terakhir dipenuhi oleh $b = 87$ dan $a = 107$.

Untuk $a = 107$, maka $9xy = 9a + 4 = 9(107) + 4 = 967$

Karenanya, bilangan yang dimaksud adalah $N = 967$.

Jadi, jumlah angka-angka $N$ adalah $9 + 6 + 7 = 22$.

133. Sebuah pecahan $\frac{x}{y}$ memiliki sifat-sifat sebagai berikut.

a. $\frac{x}{y} = \frac{4}{3}$

b. $x + y$ bilangan dengan dua angka.

c. $x + y$ kuadrat sempurna.

Nilai dari $x - y$ adalah ….

A. 3 B. 4 C. 5 D. 6 E. 7

**Solusi: [E]**

$(x + y)$ adalah bilangan dua angka dan kuadrat sempurna, maka $(x + y) \in \{16,25,36,49,64,81\}$

Karena $\frac{x}{y} = \frac{4}{3}$, maka $x = 4k$ dan $y = 3k$, sehingga $x + y = 7k$.

Sehingga kita memperoleh $7k = 49$ atau $k = 7$.

Karena itu, $x = 4k = 4 \times 7 = 28$ dan $y = 3k = 3 \times 7 = 21$.

Jadi, nilai $x - y = 28 - 21 = 7$.

134. Sebuah bilangan terdiri atas dua digit. Bilangan tersebut 7 kali jumlah kedua digitnya. Jika kedua digit itu dipertukarkan maka akan terbentuk bilangan yang lebih 18 dari jumlah kedua digitnya. Banyak faktor bilangan tersebut adalah ….

A. 5 B. 6 C. 7 D. 8 E. 9

**Solusi: [D]**

Misalnya bilangan tersebut adalah $ab$, sehingga berdasarkan informasi pertama diperoleh hubungan

$ab = 7(a + b)$

$10a + b = 7a + 7b$

$a = 2b$ …. (1)

Sedangkan berdasarkan informasi kedua diperoleh hubungan

$ba = (a + b + 18)$

$10b + a = a + b + 18$

$b = 2$…. (2)

Substitusikan nilai $b = 2$ ke persamaan (1), sehingga diperoleh $a = 4$.

Bilangan yang diminta adalah 42.

Karena $42 = 2 \times 3 \times 7$, maka banyak faktor dari 42 adalah

$(1+1)(1+1)(1+1) = 8$

135. Jumlah dua bilangan bulat 17 dan jumlah pangkat tiganya 1241. Carilah bilangan yang terbesarnya.

A. 4 B. 7 C. 8 D. 9 E. 27

**Solusi: [D]**

Ambillah kedua bilangan tersebut adalah *p* dan *q*, sehingga

$p + q = 17$ …. (1)

$p^3 + q^3 = 1241$…. (2)

Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh

$$p^3 + q^3 = 1241$$
$$(p+q)^3 - 3pq(p+q) = 1241$$
$$(17)^3 - 3pq(17) = 1241$$
$$4913 - 51pq = 1241$$
$$51pq = 3672$$
$$pq = 72$$
$$q = 17 - p \rightarrow pq = 72$$
$$p(17-p) = 72$$
$$p^2 - 17p + 72 = 0$$
$$(p-8)(p-9) = 0$$
$$p = 8 \text{ atau } p = 9$$
$$p = 8 \rightarrow q = 17 - p = 17 - 8 = 9$$
$$p = 9 \rightarrow q = 17 - p = 17 - 9 = 8$$

Jadi, bilangan yang terbesarnya adalah 9.

136. Misalnya *a* dan *b* bilangan real dan $a^2 + 3ab + b^2 = 2005$ Berapakah nilai maksimum yang mungkin untuk *ab*?

A. 312 B. 401 C. 402 D. 411 E. 412

**Solusi: [B]**

$$a^2 + 3ab + b^2 = 2005$$
$$a^2 + b^2 = 2005 - 3ab$$

Karena *a* dan *b* bilangan real, maka

$$(a-b)^2 \geq 0$$
$$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$$
$$a^2 + b^2 - 2ab \geq 0$$
$$2005 - 3ab - 2ab \geq 0$$

$5ab \le 2005$

$ab \le 401$

Jadi, nilai maksimum yang mungkin untuk *ab* adalah 401.

137. Banyak semua bilangan bulat *n*, sehingga $(n-2)(n-3)$ habis dibagi oleh $n-6$ adalah ….

A. 16 B. 14 C. 12 D. 10 E. 6

**Solusi: [C]**

$\frac{(n-2)(n-3)}{n-6} = \frac{n^2-5n+6}{n-6} = n+1+\frac{12}{n-6}$. Jadi, $n-6$ adalah pembagi atau faktor dari 12, sehingga $(n-6) \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12\}$ yang memberikan $n \in \{-6, 0, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 12, 18\}$.

Jadi, banyak bilangan *n* adalah 12.

138. Diberikan bilangan-bilangan $x = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{20}$, $y = 2^{65}$, dan $z = 5^{22} - 125^7$. Pernyataan yang benar adalah ….

A. $y > z > x$ B. $y > x > z$ C. $x > y > z$ D. $x > z > y$ E. $z > y > x$

**Solusi: [A]**

$$x = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{20} = \frac{2^0\left(2^{21}-1\right)}{2-1} = 2^{21} - 1$$

$$y = 2^{65} = 2^2 \times 2^{63} = 4 \times \left(2^3\right)^{21} = 4 \times 8^{21}$$

$$z = 5^{22} - 125^7 = 5^{22} - \left(5^3\right)^7 = 5^{22} - 5^{21} = 5^{21}(5-1) = 4 \times 5^{21}$$

Jadi, $y > z > x$

139. Persamaan $19x + 97y = 1997$ dipenuhi oleh bilangan bulat positif $x = 100$ dan $y = 1$. Ada hanya satu pasangan bilangan bulat lain yang memenuhi persamaan. Berapa jumlah bilangan tersebut?

A. 20 B. 23 C. 32 D. 42 E. 46

**Solusi: [B]**

$19x + 97y = 19 \times 100 + 97 \times 1$

$97y - 97 \times 1 = 19 \times 100 - 19x$

$97(y-1) = 19(100-x)$

Bilangan 97 dan 19 masing-masing adalah bilangan prima, sehingga $100 - x = 97k$ dan $y - 1 = 19k$.

Untuk *x* dan *y* keduanya positif, sehingga

$k = 1 \rightarrow 100 - x = 97k$

$100 - x = 97 \times 1$

$x = 3$

$k = 1 \rightarrow y - 1 = 19k$

$$y-1=19\times 1$$
$$y=20$$
$$x+y=3+20=23$$

Jadi, jumlah bilangan itu adalah 23.

140. Berapa paling kecil bilangan bulat terbesar dari $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^6$

A. 198 B. $198\sqrt{6}$ C. 485 D. 790 E. 970

**Solusi: [E]**

$$\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^6=\left[\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2\right]^3=\left(3+2\sqrt{6}+2\right)^3=\left(5+2\sqrt{6}\right)^3$$
$$=125+150\sqrt{6}+360+48\sqrt{6}=485+198\sqrt{6}$$

Analog dengan di atas, kita memperoleh $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^6=485-198\sqrt{6}$ .

Sehingga: $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^6+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^6=$ 970 dan $0<\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^6<1$, paling kecil bilangan bulat terbesar dari $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^6$ adalah 970.