Solusi Pengayaan Matematika
Edisi 13

Nomor Soal: 121-130

121. Tentukan angka terakhir dari bilangan $n = 1! + 2! + 3! + ... + 2006!$

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4 E. 6

Solusi: [C]

Angka terakhir $n!$ adalah 0 untuk $n \geq 5$.

Jumlah $1!+2!+3!+4!$ $= 1 + 2 + 6 + 24 = 33$ mempunyai angka terakhir 3.

Jadi, angka terakhir dari bilangan $n = 1! + 2! + 3! + ... + 2006!$ adalah 0 + 3 = 3.

122. Didefinisikan bahwa $n! = n(n-1)(n-2)(n-3) \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1$. Jika diberikan $\frac{n!}{(n-r)!r!} = 56$ dan $\frac{n!}{(n-r)!} = 336$.

Carilah nilai $3r + 2n$.

A. 45 B. 30 C. 25 D. 24 E. 11

Solusi: [C]

$$\frac{n!}{(n-r)!r!} = 56$$

$$\frac{n!}{(n-r)!} = 56r!$$

$$336 = 56r!$$

$$r! = 6$$

$$r = 3$$

$$\frac{n!}{(n-r)!r!} = 56$$

$$\frac{n!}{(n-3)!3!} = 56$$

$$\frac{n!}{(n-3)!} = 56 \times 3!$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{(n-3)!} = 336$$

$$n\left(n^2 - 3n + 2\right) = 336$$

$$n^3 - 3n^2 + 2n - 336 = 0$$

$$(n-8)\left(n^2 + 5n + 42\right) = 0$$

8	1	–3	2	–336
		8	40	336
	1	5	42	0

$n = 8$

$\therefore\ 3r + 2n = 3 \cdot 3 + 2 \cdot 8 = 25$

123. Terdapat 10 calon pengurus suatu organisasi, akan dibentuk pengurus organisasi itu yang terdiri dari seorang Ketua, seorang Sekretaris, dan seorang Bendahara. Carilah banyaknya formasi pengurus organisasi yang dapat dibentuk, jika setiap orang tidak boleh merangkap jabatan.

A. 720 B. 480 C. 360 D. 120 E. 72

Solusi: [A]

Banyaknya formasi pengurus organisasi yang dapat dibentuk, jika setiap orang tidak boleh merangkap jabatan $= {}_{10}P_3 = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7!} = 720$.

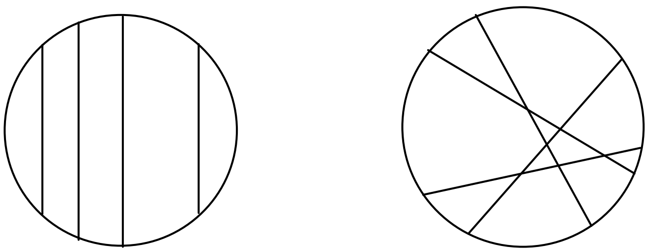
124. Dalam sebuah bidang, empat garis berlainan memotong bagian dalam lingkaran dan membentuk daerah-daerah di dalam lingkaran. Jika *m* mewakili jumlah maksimum daerah yang dapat dibentuk dan *n* mewakili jumlah minimumnya, carilah *m* + *n* ?

A. 48 B. 32 C. 26 D. 16 E. 11

Solusi: [D]

Minimum terjadi bila tidak ada garis yang berpotongan di dalam lingkaran. Hal ini membagi lingkaran dalam 5 daerah. Maksimum terjadi bila tiap-tiap segmen memotong semua yang lain pada titik-titik berlainan di dalam lingkaran, sambil membagi lingkaran dalam 11 daerah.

Jadi, penyelesaian yang diminta adalah 5 + 11 = 16.



125. Berapa bilangan yang memiliki 10 angka yang dapat dibuat dari angka-angka 2, 3, 4, 5, dan 6?

A. 50 B. 500 C. 510 D. 10^5 E. 5^{10}

Solusi: [E]

Banyak bilangan yang terdiri dari 10 angka itu seluruhnya ada 5 × 5 × … × 5 = 5^{10} buah.

126. Tentukan nilai *n* sehingga konstanta dari penjabaran (ekspansi) $\left(x^2 - x^{-1}\right)^n$ adalah 15.

A. 6 B. 9 B. 15 D. 25 E. 30

Solusi: [A]

$\binom{n}{k}\left(x^{2k}\right)\left(-x^{k-n}\right)=15$ sehingga $\binom{n}{\frac{n}{3}}\left(x^2\right)^{\frac{n}{3}}\left(-x^{-\frac{2n}{3}}\right)=15$.

Ini memberikan $\binom{n}{\frac{n}{3}}=15$. Sehingga nilai $n=6$.

127. Hitunglah nilai dari ${}_{2005}C_0+{}_{2005}C_2+{}_{2005}C_4+...+{}_{2005}C_{2004}$

A. 2^{2000} B. 2^{2001} C. 2^{2002} D. 2^{2003} E. 2^{2004}

Solusi: [E]

Kita mengetahui bahwa ${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+{}_nC_3+...+{}_nC_n=2^n$

$$\begin{array}{l} {}_{2005}C_0+{}_{2005}C_1+{}_{2005}C_3+...+{}_{2005}C_{2005}=2^{2005} \\ \underline{{}_{2005}C_0-{}_{2005}C_1+{}_{2005}C_2-...-{}_{2005}C_{2005}=0} \quad - \\ 2\left({}_{2005}C_0+{}_{2005}C_2+{}_{2005}C_4+...+{}_{2005}C_{2004}\right)=2^{2005} \\ {}_{2005}C_0+{}_{2005}C_2+{}_{2005}C_4+...+{}_{2005}C_{2004}=2^{2004} \end{array}$$

128. Tentukan banyaknya bilangan bulat positif yang dapat dibentuk dari angka-angka 1, 2, 3, dan 4; jika tak ada angka diulang dalam setiap bilangan bulat.

A. 512 B. 256 C. 128 D. 64 E. 32

Solusi: [D]

Perhatikan, tak ada bilangan bulat yang memuat lebih dari 4 angka. Misalnya n_1, n_2, n_3, dan n_4 menyatakan banyaknya bilangan bulat masing-masing yang memuat angka-angka 1, 2, 3, dan 4. Kita tentukan nilai-nilai n_1, n_2, n_3, dan n_4 secara terpisah.

Karena ada 4 angka, maka ada 4 bilangan bulat yang dengan tepat memuat satu angka, yaitu n_1 = 4. Juga karena ada 4 angka, maka ada $4\times 3=12$ bilangan bulat yang memuat dua angka, yaitu n_2 = 12. Dengan logika yang serupa, maka ada $4\times 3\times 2=24$ bilangan bulat yang memuat 3 angka dan ada $4\times 3\times 2\times 1=24$ bilangan bulat yang memuat 4 angka, yaitu n_3 = 24 dan n_4 = 24.

Jadi, seluruhnya ada $n_1+n_2+n_3+n_4=4+12+24+24=64$ bilangan bulat.

129. Carilah nilai $(n+1)!$ jika n memenuhi persamaan $(n+5)!=72(n+3)!$

A. 720 B. 480 C. 360 D. 120 E. 24

Solusi: [D]

$(n+5)!=72(n+3)!$

$(n+5)(n+4)(n+3)!=72(n+3)!$

$(n+5)(n+4)=72$

$n^2+9n-52=0$

$(n-4)(n+13)=0$

$n=4$ (diterima) atau $n=-5$ (ditolak)

Jadi, nilai $\left(n+1\right)!=\left(4+1\right)!=5!=120$.

130. Untuk *n* bilangan asli maka 3^m adalah faktor adari 100! Berapa buahkah bilangan yang merupakan dari faktor 100! tersebut?

A. 96 B. 84 C. 72 D. 48 E. 32

Solusi: [D]

3^m faktor dari 100!, dengan *n* adalah bilangan asli.

100 × 99 × 98 × … × 3 × 2 × 1

Untuk *m* = 1, faktor pembaginya: 3, 6, 12, …, 99

$u_n = a+(n-1)b$

$99 = 3+(n-1)3$

$n = 33$

Banyak faktor pembaginya adalah 33.

Untuk *m* = 2, faktor pembaginya: 9, 18, 27, …, 99

$u_n = a+(n-1)b$

$99 = 9+(n-1)9$

$n = 11$

Banyak faktor pembaginya adalah 11.

Untuk *m* = 3, faktor pembaginya: 27, 54, 81

Banyak faktor pembaginya adalah 3.

Untuk *m* = 4, faktor pembaginya: 81

Banyak faktor pembaginya adalah 1.

Jadi, jumlah faktor pembaginya = 33 + 11 + 3 + 1 = 48 buah.