

Solusi Pengayaan Matematika

Edisi 12

Nomor Soal: 111-120

111. Tentukan nilai n sehingga dua buah garis berikut ini sejajar.

$$4x + ny = -2$$

$$-3x + (n-7)y = 5$$

- A. 7 B. 6 C. 5 D. 4 E. 3

Solusi: [D]

$$\frac{-4}{n} = \frac{3}{n-7}$$

$$-4n + 28 = 3n$$

$$7n = 28$$

$$n = 4$$

112. Pada trapesium $ABCD$, $AB \parallel CD$ dan tingginya 10 satuan. F adalah titik tengah AC dan G adalah titik tengah BD . Carilah luas $\triangle EFG$.

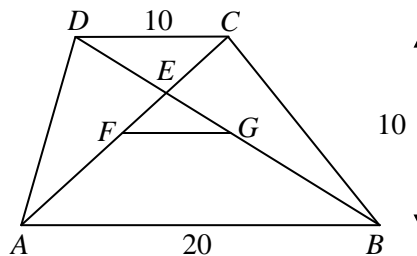
A. $\frac{35}{6}$

B. $\frac{31}{6}$

C. $\frac{29}{6}$

D. $\frac{25}{6}$

E. $\frac{23}{6}$



Solusi: [D]

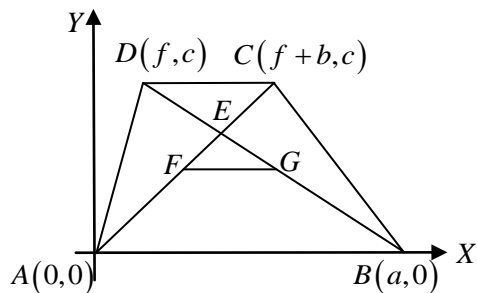
Perhatikan gambar berikut ini.

Koordinat F adalah $\left(\frac{f+b}{2}, \frac{c}{2}\right)$

dan koordinat G adalah

$\left(\frac{f+a}{2}, \frac{c}{2}\right)$. Ini memberikan

panjang FG sebagai $\left(\frac{a-b}{2}\right)$.



Persamaan garis AC adalah $y = \frac{c}{f+b}x$.

Persamaan garis BD adalah $y - 0 = \frac{-c}{a-f}(x-a)$.

Dari persamaan garis AC dan BD diperoleh $a - \left(\frac{a-f}{c}\right)y = \left(\frac{f+b}{c}\right)y$ atau

$$y = \frac{ac}{a+b}$$

Tinggi segitiga adalah $\left(\frac{ac}{a+b} - \frac{c}{2}\right)$ dan alasnya $\frac{a-b}{2}$

$$[EFG] = \frac{1}{2} \times \frac{a-b}{2} \times \left(\frac{ac}{a+b} - \frac{c}{2}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{a-b}{2} \times c \left[\frac{2a-a-b}{2(a+b)}\right] = \frac{c(a-b)^2}{8(a+b)}$$

Karena $a = 20$ dan $b = c = 10$, maka

$$[EFG] = \frac{c(a-b)^2}{8(a+b)} = \frac{10(20-10)^2}{8(20+10)} = \frac{1000}{240} = \frac{25}{6} \text{ satuan luas.}$$

113. Diberikan $\triangle ABC$ dengan sudut C adalah siku-siku. P adalah titik di dalam segitiga tersebut sehingga $AP = 3$, $BP = 5$, dan $CP = 2\sqrt{2}$. Berapakah luas $\triangle ABC$?

A. 24,5 B. 20,0 C. 16,5 D. 14,5 E. 12,0

Solusi: [D]

Kita letakan $\triangle ABC$ dalam sumbu koordinat. Misalnya panjang kaki-kaki $\triangle ABC$ adalah h dan $P(x, y)$.

$$[ABC] = \frac{1}{2}h^2$$

$$x^2 + y^2 = (2\sqrt{2})^2$$

$$x^2 + y^2 = 8 \dots (1)$$

$$(h-y)^2 + x^2 = 3^2$$

$$h^2 - 2hy + y^2 + x^2 = 9 \dots (2)$$

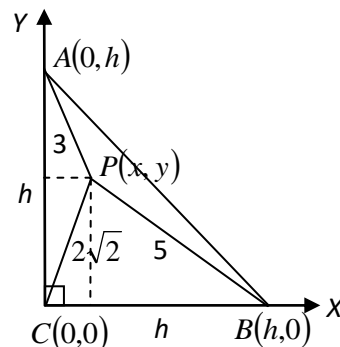
Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh

$$h^2 - 2hy + 8 = 9$$

$$h^2 - 2hy = 1$$

$$2hy = h^2 - 1$$

$$4h^2y^2 = h^4 - 2h^2 + 1 \dots (3)$$



$$(h-x)^2 + y^2 = 5^2$$

$$h^2 - 2hx + x^2 + y^2 = 25 \dots (4)$$

Dari persamaan (1) dan (4) diperoleh

$$h^2 - 2hx + 8 = 25$$

$$h^2 - 2hx = 17$$

$$2hx = h^2 - 17$$

$$4h^2x^2 = h^4 - 34h^2 + 289 \dots (5)$$

Jumlah persamaan (3) dan (5) menghasilkan

$$4h^2y^2 + 4h^2x^2 = 2h^4 - 36h^2 + 290$$

$$4h^2(x^2 + y^2) = 2h^4 - 36h^2 + 290$$

$$4h^2(8) = 2h^4 - 36h^2 + 290$$

$$32h^2 = 2h^4 - 36h^2 + 290$$

$$2h^4 - 68h^2 + 290 = 0$$

$$h^4 - 34h^2 + 145 = 0$$

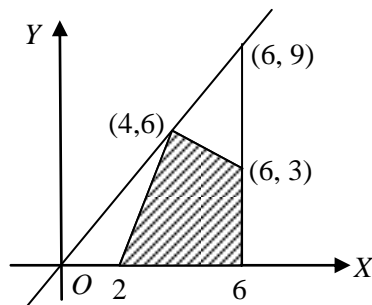
$$(h^2 - 5)(h^2 - 29) = 0$$

$h^2 = 5$ (ditolak) atau $h^2 = 29$ (diterima)

$$\therefore [ABC] = \frac{1}{2}h^2 = \frac{1}{2} \times 29 = 14,5$$

114. Pada diagram, tentukan luas daerah yang diarsir

- A. 16
- B. 15
- C. 14
- D. 13
- E. 12



Solusi: [D]

Luas daerah yang diarsir = $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 9 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 6 - \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2 = 27 - 6 - 6 = 13$ satuan.

115. Persamaan garis yang melalui titik (3,2) di mana luas yang dibentuknya dengan sumbu koordinat adalah 12 dinyatakan dalam bentuk $ax + by + c = 0$.

Nilai dari $a + b - c = \dots$

- A. 19
- B. 17
- C. 16
- D. 15
- E. 12

Solusi: [B]

Persamaan garis yang melalui titik-titik $(a,0)$ dan $(0,b)$ adalah $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

Persamaan garis tersebut melalui titik $(3, 2)$, sehingga diperoleh persamaan

$$\text{garisnya } \frac{3}{a} + \frac{2}{b} = 1.$$

$$\frac{3b + 2a}{ab} = 1$$

$$3b + 2a - ab = 0 \dots (1)$$

Kasus 1:

$$\frac{1}{2}ab = 12$$

$$ab = 24$$

$$a = \frac{24}{b} \dots (2)$$

$$a = \frac{24}{b} \rightarrow 3b + 2a - ab = 0$$

$$3b + 2 \times \frac{24}{b} - 24 = 0$$

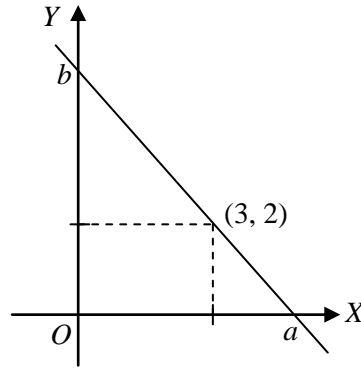
$$3b^2 - 24b + 48 = 0$$

$$b^2 - 8b + 16 = 0$$

$$(b - 4)^2 = 0$$

$$b = 4$$

$$b = 4 \rightarrow a = \frac{24}{b} = \frac{24}{4} = 6$$



Persamaan garisnya adalah $\frac{x}{6} + \frac{y}{4} = 1$ atau $2x + 3y - 12 = 0$

Karena itu, $a = 2, b = 3,$ dan $c = -12$, sehingga $a + b - c = 2 + 3 - (-12) = 17$

116. Tentukan tempat kedudukan semua titik $P(x, y)$ yang jaraknya sama terhadap titik-titik $A(3, 2)$ dan $B(-1, 4)$.

A. $2x - y + 1 = 0$

C. $x - 2y + 1 = 0$

E. $2x - 2y + 1 = 0$

B. $2x + y + 1 = 0$

D. $x + 2y + 1 = 0$

Solusi: [A]

$$|AP| = |BP|$$

$$\sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x+1)^2 + (y-4)^2}$$

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 = (x+1)^2 + (y-4)^2$$

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = x^2 + 2x + 1 + y^2 - 8y + 16$$

$$-8x + 4y - 4 = 0$$

$$2x - y + 1 = 0$$

Jadi, tempat kedudukan yang diminta adalah $2x - y + 1 = 0$.

117. Hitunglah luas segi-4 $ABCD$, dengan $A(2,5)$; $B(4,-1)$; $C(8,3)$; dan $D(6,7)$.

A. 52 B. 42 C. 32 D. 26 E. 16

Solusi 1: [D]

$$\begin{aligned} [ABCD] &= \frac{1}{2} \left\| \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_4 & y_4 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \right\| \\ &= \frac{1}{2} \left\| \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \right\| \\ &= \frac{1}{2} |(-2 - 20) + (12 + 8) + (56 - 18) + (30 - 14)| = \frac{1}{2} |-22 + 20 + 38 + 16| \\ &= \frac{1}{2} |52| = 26 \text{ satuan luas.} \end{aligned}$$

Solusi 2: [D]

$$\begin{aligned} [ABCD] &= \frac{1}{2} \left\| \begin{vmatrix} 2 & 4 & 8 & 6 & 2 \\ 5 & -1 & 3 & 7 & 5 \end{vmatrix} \right\| = \frac{1}{2} |-2 + 12 + 56 + 30 - 20 + 8 - 18 - 14| \\ &= \frac{1}{2} |52| = 26 \end{aligned}$$

118. Tentukan jarak dari titik $(8,5)$ ke persamaan yang grafiknya terdiri dari semua titik yang berjarak sama terhadap titik $(-1,2)$ dan $(3,4)$.

A. $5\sqrt{5}$ B. $4\sqrt{5}$ C. $3\sqrt{5}$ D. $2\sqrt{5}$ E. $\sqrt{5}$

Solusi: [B]

Misalnya (x, y) satu titik dari grafik, sehingga

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = (x-3)^2 + (y-4)^2$$

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 8y + 16$$

$$8x + 4y = 20$$

$$2x + y - 5 = 0$$

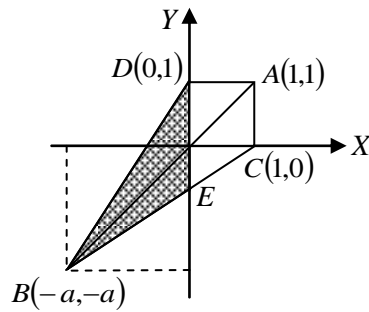
Persamaan grafiknya adalah $2x + y - 5 = 0$.

Jarak titik $P(x_1, y_1)$ ke garis $Ax + By + C = 0$ adalah $d = \left| \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|$.

$$d = \left| \frac{2 \cdot 10 + 5 - 5}{\sqrt{2^2 + 1^2}} \right| = 4\sqrt{5}$$

119. Dari segi empat $ACBD$, dengan koordinat titik-titik sudutnya adalah $A(1,1)$, $B(-a,-a)$, $C(1,0)$, dan $D(0,1)$. Jika luas $\triangle BDE$, sama dengan luas segi empat $ACED$, maka nilai a adalah

- A. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
 B. $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$
 C. $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$
 D. $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$
 E. $\frac{1+2\sqrt{5}}{2}$



Solusi: [A]

Misalnya garis BC memotong sumbu Y di titik $E(0,-b)$.

Perhatikan $\triangle BFE \sim \triangle COE$

$$\frac{FB}{FE} = \frac{OC}{OE}$$

$$\frac{a}{a-b} = \frac{1}{b}$$

$$ab = a - b$$

$$ab + b = a$$

$$(a+1)b = a$$

$$b = \frac{a}{a+1}$$

$$[BDE] = [ACED]$$

$$\frac{1}{2}DE \times FB = OC \times OD + \frac{1}{2}OC \times OE$$

$$DE \times FB = 2 \times OC \times OD + OC \times OE$$

$$(1+b) \times a = 2 \times 1 \times 1 + 1 \times b$$

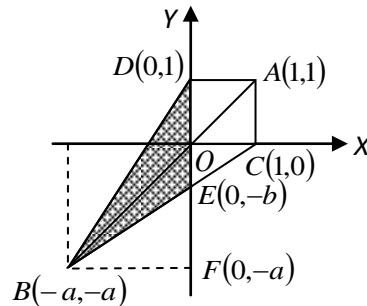
$$\left(1 + \frac{a}{a+1}\right) \times a = 2 + \frac{a}{a+1}$$

$$(a+1+a) \times a = 2a + 2 + a$$

$$2a^2 + a = 2a + 2 + a$$

$$2a^2 - 2a - 2 = 0$$

$$a^2 - a - 1 = 0$$



$$a = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Karena $a > 0$, maka $a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

120. Dua buah segitiga siku-siku yang sama mempunyai ukuran sisi-sisinya adalah 3, 4, dan 5. Kedua segitiga itu diimpitkan seperti tampak pada gambar berikut. Hitunglah luas daerah yang diarsir.

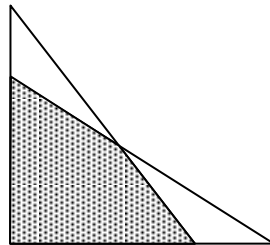
A. $\frac{36}{7}$

B. $\frac{34}{7}$

C. $\frac{33}{7}$

D. $\frac{32}{7}$

E. $\frac{31}{7}$



Solusi: [A]

Letakkan bangun tersebut pada sumbu koordinat Kartesis.

Persamaan garis yang melalui titik (4,0) dan (0,3) adalah

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$$

$$3x + 4y = 12 \dots (1)$$

Persamaan garis yang melalui titik (3,0) dan (0,4) adalah

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$$

$$4x + 3y = 12 \dots (2)$$

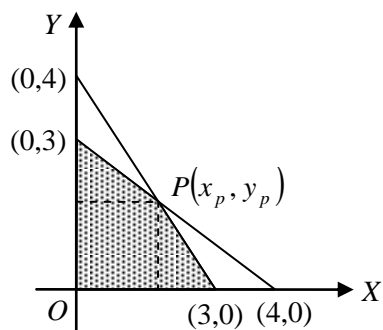
$3 \times$ Persamaan (1) $- 4 \times$ Persamaan (2) menghasilkan

$$-7x = -12$$

$$x = \frac{12}{7}$$

Substitusikan $x = \frac{12}{7}$ ke persamaan (2) kita mendapatkan

$$4\left(\frac{12}{7}\right) + 3y = 12$$



$$3y = 12 - 4\left(\frac{12}{7}\right)$$

$$y = 4 - \frac{16}{7} = \frac{12}{7}$$

Koordinat titik P adalah $\left(\frac{12}{7}, \frac{12}{7}\right)$.

$$\therefore \text{Luas daerah yang diarsir} = \frac{1}{2} \times 4 \times 3 - \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{12}{7} = 6 - \frac{6}{7} = 5\frac{1}{7}$$