Solusi Pengayaan Matematika

Edisi 11

Nomor Soal: 101-110

101. Bilangan desimal 0,7777… dinyatakan dalam hasil bagi bilangan rasional sebagai $\frac{a}{b}$, dengan a dan b relatif prima. Nilai dari $a+b=....$

A. 17 B. 16 C. 15 D. 14 E. 13

Solusi 1: [B]

Misalnya $x=0{,}7777...$, sehingga

$$\begin{array}{rl} 10x &= 7{,}777... \\ x &= 0{,}7777... \\ \hline 9x &= 7 \\ x &= \frac{7}{9} \end{array} -$$

Karena itu, $0{,}7777...=\frac{7}{9}=\frac{a}{b}$, dengan $a=7 \text{ dan } b=9$.

Jadi, nilai dari $a+b=7+9=16$.

Catatan: 0,7777… biasa ditulis juga sebagai $0,\overline{7}$.

Solusi 2: [B]

0,7777… = 0,7 + 0,07 + 0,007 + …

$a = 0{,}7$ dan $r=\frac{0{,}07}{0{,}7}=0{,}1$

$$S=\frac{a}{1-r}=\frac{0{,}7}{1-0{,}1}=\frac{0{,}7}{0{,}9}=\frac{7}{9}$$

Karena itu, $0{,}7777...=\frac{7}{9}=\frac{a}{b}$, dengan $a=7 \text{ dan } b=9$.

Jadi, nilai dari $a+b=7+9=16$.

102. Bilangan desimal 0,454545… dinyatakan dalam hasil bagi bilangan rasional sebagai $\frac{a}{b}$, dengan a dan b relatif prima. Nilai dari $a+b=....$

A. 17 B. 16 C. 15 D. 14 E. 13

Solusi 1: [B]

Misalnya $x=0{,}454545...$, maka

$$\begin{array}{rl} 100x &= 45{,}4545... \\ x &= 0{,}454545... \\ \hline 99x &= 45 \\ x &= \frac{45}{99}=\frac{5}{11} \end{array} -$$

Karena itu, $0{,}454545\ldots=\frac{5}{11}=\frac{a}{b}$, dengan $a=5 \text{ dan } b=11$.

Jadi, nilai dari $a+b=5+11=16$.

Catatan: 0,454545… biasa ditulis juga sebagai $0,\overline{45}$.

Solusi 2: [B]

0,454545… = 0,45 + 0,0045 + 0,000045 + …

$a = 0{,}45$ dan $r = \dfrac{0{,}0045}{0{,}45} = 0{,}01$

$$S = \frac{a}{1-r} = \frac{0{,}45}{1-0{,}01} = \frac{45}{99} = \frac{5}{11}$$

Karena itu, $0{,}454545... = \dfrac{5}{11} = \dfrac{a}{b}$, dengan $a = 5 \text{ dan } b = 11$.

Jadi, nilai dari $a + b = 5 + 11 = 16$.

103. Bilangan desimal 89,4352352352…dinyatakan dalam hasil bagi bilangan rasional sebagai $a\dfrac{b}{c}$, dengan b dan c relatif prima. Nilai dari $b = ...$

A. 2174 B. 4172 C. 4995 D. 7214 E. 9954

Solusi 1: [A]

Misalnya $x = 89{,}4352352352..$, sehingga

$$\begin{array}{rl} 10000x = 894352{,}352352.. & \\ 10x = 894{,}352352352.. & \\ \hline 9990x = 893458 & - \end{array}$$

$$x = \frac{893458}{9990} = 89\frac{2174}{4995}$$

Karena itu, $89{,}4352352352.. = 89\dfrac{2174}{4995} = a\dfrac{b}{c}$, sehingga $a = 89, b = 2174, \text{dan } c = 4995$.

Jadi, nilai dari $b = 2174$

Solusi 2: [A]

89,4352352352… = 89,4 + 0,0352 + 0,0000352 + …

$a = 0{,}00352$ dan $r = \dfrac{0{,}0000352}{0{,}0352} = 0{,}0001$

$$S = 89\frac{2}{5} + \frac{a}{1-r} = 89\frac{2}{5} + \frac{0{,}0352}{1-0{,}001} = 89\frac{2}{5} + \frac{352}{9990} = 89\frac{2}{5} + \frac{176}{4995} = 89\frac{21}{74}$$

Karena itu, $89{,}4352352352.. = 89\dfrac{2174}{4995} = a\dfrac{b}{c}$, sehingga $a = 89, b = 2174, \text{dan } c = 4995$.

Jadi, nilai dari $b = 2174$

Catatan: 89,4352352352… biasa ditulis juga sebagai $89{,}4\overline{352}$.

104. Jika a, b, c, dan d adalah bilangan asli dan $abcd \times 4 = bcba$, tentukan jumlah angka-angka bilangan $abcd$.

A. 22 B. 20 C. 19 D. 18 E. 16

Solusi: [D]

$abcd \times 4 = dcba$

Di sini $a < 3$, karena 3000 × 4 = 12000 maka hasil perkalian ini terdiri dari 5 angka, sehingga haruslah a adalah bilangan genap, yaitu $a = 2$.

Dari $2bcd \times 4 = dcb2$ diperoleh $d \geq 8$ dan hasil kali $d \times 4$ berakhiran angka 2, sehingga $d = 8$.

Kita memperoleh hasil $2bc8 \times 4 = 8cb2$ atau

$8000 + 400b + 40c + 32 = 8000 + 100c + 10b + 2$

$390b+30=60c$

$13b+1=2c$

Pada ruas kanan adalah genap dan $2c \le 18$, sehingga b harus ganjil dan kurang dari pada 2, maka $b=1$ dan $c=7$.

Karena itu, bilangan $abcd$ adalah 2178, sehingga jumlah angka-angkanya = 2 + 1 + 7 + 8 = 18

105. Pada tahun 2000 umur *Alifba* sama dengan jumlah semua digit tahun kelahirannya, Dapatkah Anda menentukan umur *Alifba*?

A. 29 tahun B. 24 tahun C. 20 tahun D. 19 tahun E. 17 tahun

Solusi: [D]

Misalnya tahun kelahiran *Alifba* adalah $abcd$ dan umurnya pada tahun 2000 adalah EF, sehingga

$2000 - EF = abcd$ …. (1)

$a + b + c + d = EF$…. (2)

Sehingga diperoleh hubungan

$d + F = 10$ (karena penjumlahan suku terakhir 0)

$c + E = 9$ (karena mendapat tambahan angka 1 dari $d + F$)

Karena $a + b + c + d$ tidak mungkin lebih dari 100, maka Alifba lahir pada tahun 1900-an, sehingga nilai $a = 1$ dan $b = 9$.

Persaman (2) menjadi

$10 + c + d = EF$

Bilangan EF minimum adalah 10, jika $c = 0$ dan $d = 0$.

Bilangan EF maksimum adalah 28, jika $c = 9$ dan $d = 9$, maka nilai E ada dua kemungkinan, yaitu 1 atau 2.

Untuk $E = 1$, maka $c = 8$ sehingga

$1 + 9 + 8 + d = 1 \cdot F$

$18 + d = F$

Maka nilai $d = 1$ dan $F = 9$.

Jadi, umur *Alifba* pada tahun 2000 adalah 19 tahun atau lahir pada tahun 1981.

106. Jika bilangan-bilangan 3945, 4686, dan 5598 dibagi dengan p, maka masing-masing akan memberikan sisa yang sama. Carilah hasil kali p dengan sisa itu.

A. 32 B. 49 C. 57 D. 69 E. 96

Solusi: [D]

$\frac{3945}{x} = a + \frac{s}{x} \Leftrightarrow ax + s = 3945$ …. (1)

$\frac{4686}{x} = b + \frac{s}{x} \Leftrightarrow bx + s = 4686$ …. (2)

$\frac{5598}{x} = c + \frac{s}{x} \Leftrightarrow cx + s = 5598$ …. (3)

Persamaan (2) – (1): $(b-a)x = 741$ …. (4)

Persamaan (3) – (1): $(c-a)x = 1653$ …. (5)

Persamaan (3) – (2): $(c-b)x = 912$ …. (6)

Faktor prima dari $741 = 3 \cdot 13 \cdot 19$

Faktor prima dari $1653 = 3 \cdot 19 \cdot 29$

Faktor prima dari $912 = 3 \cdot 2^4 \cdot 19$

Kelipatan dari bilangan 741, 1653, dan 912 adalah $3 \cdot 19 = 57$.

Dengan demikian,

$\frac{3945}{57} = 69 + \frac{12}{57}$

$\frac{4686}{57} = 82 + \frac{12}{57}$

$\frac{5598}{57} = 98 + \frac{12}{57}$

Jadi, jumlah dari p ditambah bilangan sisa tersebut = 57 + 12 = 69.

107. Ada bilangan bulat positif pengganti a dan b sedemikian sehingga $a^3 + b^3 = 351^4$. Nilai dari $a + b = ...$

A. 3159 B. 2457 C. 1359 D. 1270 E. 702

Solusi: [A]

$351 = 2^3 + 7^3$

$351 \times 351^3 = 2^3 \times 351^3 + 7^3 \times 351^3$

$351^4 = (2 \times 351)^3 + (7 \times 351)^3$

$a = 2 \times 351 = 702$

$b = 7 \times 351 = 2457$

Ada bilangan bulat positif pengganti a dan b sedemikian sehingga $a^3 + b^3 = 351^4$, yaitu a = 702 dan b = 2457.

Jadi, nilai dari $a + b = 702 + 2457 = 3159$

108. Tentukan banyak pasangan (a, b) yang memenuhi persamaan $a + b = a^2 - ab + b^2$, dengan a dan b adalah bilangan bulat positif.

A. 6 B. 5 C. 4 D. 3 E. 2

Solusi: [A]

$a + b = a^2 - ab + b^2$

$2a + 2b = 2a^2 - 2ab + 2b^2$

$a^2 - 2a + b^2 - 2b + a^2 - 2ab + b^2 = 0$

$a^2 - 2a + 1 + b^2 - 2b + 1 + ax^2 - 2ab + b^2 = 2$

$(a - 1)^2 + (b - 1)^2 + (a - b) = 2$

a	0	1	0	2	1	2
b	0	0	1	1	2	2

Himpunan penyelesaiannya adalah {(0, 0), (1, 0), (0, 1), (2, 1), (1, 2), (2,2)}.

Jadi, banyak pasangan (a, b) tersebut adalah 6 buah.

109. Sebuah bilangan yang terdiri dari enam angka dimulai dengan angka 1. Tiga kali bilangan ini sama dengan bilangan semula tetapi angka 1 terletak diakhir angka. Temukan angka terakhir dari bilangan tersebut.

A. 2 B. 3 E. 4 D. 6 E. 7

Solusi: [E]

Misalnya bilangan semula adalah $1abcde$, sehingga

$$\begin{array}{r} 1\,a\,b\,c\,d\,e \\ 3 \\ \hline a\,b\,c\,d\,e\,1 \end{array} \times$$

∗ Agar $e \times 3$ menghasilkan angka akhir 1, maka haruslah e = 7.

∗ Agar $d \times 3 + 2$ menghasilkan angka akhir 7, maka haruslah d = 5.

$*$ Agar $c \times 3 + 1$ menghasilkan angka akhir 5, maka haruslah $c = 8$.

$*$ Agar $b \times 3 + 2$ menghasilkan angka akhir 8, maka haruslah $b = 2$.

$*$ Agar $a \times 3$ menghasilkan angka akhir 2, maka haruslah $a = 4$.

Sehingga, bilangan-bilangan itu adalah 142857 dan 428571.

Jadi, terakhirnya adalah 7.

110. Bilangan $72^n + 3^{2n+1} \cdot 2^{3n+1} + 8^{n+1} \cdot 9^n$ untuk setiap n bilangan bulat positif (bilangan asli) habis dibagi ....

A. 2 B. 4 C. 7 D. 11 E. 15

Solusi: [E]

$$72^n + 3^{2n+1} \cdot 2^{3n+1} + 8^{n+1} \cdot 9^n = 72^n + 9^n \cdot 3 \cdot 8^n \cdot 2 + 8^n \cdot 8 \cdot 9^n = 72^n + 72^n \cdot 6 + 72^n \cdot 8$$

$$= 72^n (1 + 6 + 8)$$

$$= 15 \cdot 72^n$$

Jadi, bilangan $72^n + 3^{2n+1} \cdot 2^{3n+1} + 8^{n+1} \cdot 9^n$ habis dibagi 15 untuk setiap n bilangan bulatu positif (bilangan asli).