Solusi Pengayaan Matematika
Edisi 11

Nomor Soal: 101-110

101. Jika $N = 1^6 + 2^6 + 3^6 + ... + 10^6$, maka angka akhir dari N^{2006} adalah ….
A. 9 B. 7 C. 6 D. 5 E. 3
Solusi: [D]
Gunakan rumus: $1^6 + 2^6 + 3^6 + ... + n^6 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)(3n^4 + 6n^3 - 3n + 1)}{42}$

$$N = 1^6 + 2^6 + 3^6 + ... + 10^6 = \frac{10(10+1)(2\times 10+1)(3\times 10^4 + 6\times 10^3 - 3\times 10 + 1)}{42}$$

$$= 1978405$$

$$N^{2006} = (1978405)^{2006} = ...\underline{5}$$

Jadi, angka akhir dari N^{2006} adalah 5.

102. Jika $N = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + ... - 2004^2 + 2005^2 - 2006$, maka jumlah angka-angka dari N dari adalah ….
A. 20 B. 18 C. 10 D. 9 E. 7
Solusi: [A]
Gunakan rumus: $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$, sehingga

$$N = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + ... - 2004^2 + 2005^2 - 2006$$

$$N = 1^2 + (3^2 - 2^2) + (5^2 - 4^2) + ... + (2005^2 - 2004^2) - 2006$$

$$N = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + ... + 2004 + 2005 - 2006$$

$$N = \frac{2005(2005+1)}{2} - 2006 = 2.009.009$$

Jadi, jumlah angka-angka N adalah $2+0+0+9+0+0+9 = 20$

103. Jika $N = 1^4 + 2^4 + 3^4 + ... + 10^4$, maka jumlah angka-angka bilangan N adalah ….
A. 26 B. 20 C. 18 D. 16 E. 14
Solusi: [D]
Gunakan rumus: $1^4 + 2^4 + 3^4 + ... + n^4 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)(3n^2 + 3n - 1)}{30}$

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + ... + 10^4 = \frac{10(10+1)(2\times 10+1)(3\times 10^2 + 3\times 10 - 1)}{30} = 25333$$

Jadi, jumlah angka-angka dari bilangan N adalah $2+5+3+3+3 = 16$.

104. Jika $N = 1^5 + 2^5 + 3^5 + ... + 10^5$, maka jumlah angka-angka bilangan N adalah ….

A. 29 B. 27 C. 23 D. 20 E. 19

Solusi: [E]

Gunakan rumus: $1^5 + 2^5 + 3^5 + ... + n^5 = \dfrac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12}$

$$N = 1^5 + 2^5 + 3^5 + ... + 10^5 = \frac{10^2(10+1)^2(2\times 10^2 + 2\times 10 - 1)}{12} = 220825$$

Jadi, jumlah angka-angka bilangan N adalah $2+2+0+8+2+5=19$

105. Jika $N = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 10^2$, maka hasil kali angka-angka dari bilangan N adalah adalah ….

A. 120 B. 140 C. 160 D. 180 E. 240

Solusi: [A]

Gunakan rumus: $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 10^2 = \frac{1}{6}\times 10(10+1)(2\times 10+1) = 385$$

Jadi, hasil kali dari angka-angka bilangan N adalah $3\times 8\times 5 = 120$

106. Diberikan n adalah bilangan bulat positif, tentukan nilai dari $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{2} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3} + \dfrac{3}{3} + \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3} + ... + \dfrac{1}{n} + \dfrac{2}{n} + ... + \dfrac{n}{n} + \dfrac{n-1}{n} + ... + \dfrac{1}{n}$

A. $\dfrac{n+1}{2}$ B. $\dfrac{n}{2}$ C. $n(n+1)$ D. $2n(n+1)$ E. $\dfrac{n(n+1)}{2}$

Solusi: [D]

Gunakan konsep $\dfrac{1}{k} + \dfrac{2}{k} + ... + \dfrac{k}{k} + \dfrac{k-1}{k} + ... + \dfrac{1}{k} = \dfrac{2\cdot\dfrac{(k-1)k}{2} + k}{k} = k$,

sehingga jumlah yang diberikan menjadi

$$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

107. Jika $N = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + 10^3$, maka jumlah angka-angka bilangan N adalah ….

A. 20 B. 16 C. 15 D. 12 E. 10

Solusi: [E]

Gunakan rumus: $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = (1+2+3+...+n)^2 = \left[\dfrac{n}{2}(n+1)\right]^2$

$$1^3+2^3+3^3+...+10^3=\left[\frac{10}{2}(10+1)\right]^2=3025$$

Jadi, jumlah angka-angka bilangan N adalah $3+0+2+5=10$.

108. Diberikan $1^3+2^3+...+n^3=1296$, dengan n bilangan asli. Jika $\sqrt{n^3-104-2\sqrt{2015}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$, tentukanlah nilai dari $a-b$.

A. 408 B. 405 C. 403 D. 398 E. 388

Solusi: [D]

$$1^3+2^3+...+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}=1296$$

$$n(n+1)=\sqrt{4\times 1296}$$

$$n^2+n-72=0$$

$$(n-8)(n+9)=0$$

$n=8$ (diterima) atau $n=-9$ (ditolak)

$$\sqrt{n^3-104-2\sqrt{2015}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$$

$$\sqrt{8^3-104-2\sqrt{2015}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$$

$$\sqrt{408-2\sqrt{2015}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$$

$$\sqrt{\left(\sqrt{403}-\sqrt{5}\right)^2}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$$

$$\sqrt{403}-\sqrt{5}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$$

$a=403$ dan $b=5$

Jadi, nilai $a-b=403-5=398$

109. Jika $x+\frac{1}{x}=-1$, tentukanlah nilai $x^{99}+\frac{1}{x^{99}}$.

A. 1 B. 2 C. 3 D. 6 E. 9

Solusi: [B]

$$x+\frac{1}{x}=-1$$

$$x^2+2+\frac{1}{x^2}=1$$

$$x^2+\frac{1}{x^2}=-1$$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=-1$$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=1$$

$$a_n=x^n+\frac{1}{x^n}$$

$$a_1=x+\frac{1}{x}=-1$$

$$a_2=x^2+\frac{1}{x^2}=-1$$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)=x^{n+1}+\frac{1}{x^{n+1}}+x^{n-1}+\frac{1}{x^{n-1}}$$

$$-a_n=a_{n+1}+a_{n-1}$$

$$a_{n+1}=-a_n-a_{n-1}$$

$$a_3=-a_2-a_1=-(-1)-(-1)=2$$

$$a_4=-a_3-a_2=-2-(-1)=-1$$

$$a_5=-a_4-a_3=-(-1)-2=-1$$

$$a_6=-a_5-a_4=-(-1)-(-1)=2$$

$$\vdots$$

$$a_{99}=-a_{98}-a_{97}=-(-1)-(-1)=2$$

Jadi, $x^{99}+\frac{1}{x^{99}}=2$

110. Berapa jumlah bilangan asli dari 1 hingga 1000 yang habis dibagi 3?

A. 166.333 B. 166.833 C. 166.838 D. 166.883 E. 166.888

Solusi 1: [B]

Bilangan-bilangan asli yang dimaksud adalah 3, 6, 9, 12, …, 999 .

Barisan ini dapat ditulis sebagai $3\times1, 3\times2, 3\times3, 3\times4, ..., 3\times333$.

Perhatikan suku terakhir barisan tersebut adalah 333.

Jadi, banyak bilangan asli dari 1 hingga 1000 yang habis dibagi 3 adalah 333.

Dari barisan tersebut diketahui $a=3$, $n=333$, dan $u_n=u_{333}=999$

$$S_n=\frac{n}{2}(a+u_n)$$

$$S_{333}=\frac{333}{2}(3+999)=166833$$

Jadi, jumlah bilangan asli dari 1 hingga 1000 yang habis dibagi 3 adalah 166.833.

Solusi 2: [B]

Bilangan-bilangan asli yang dimaksud adalah 3, 6, 9, 12, …, 999 .

$a=3$, $b=6-3=3$, dan $u_n=u_{333}=999$

$$u_n = a + (n-1)b$$
$$999 = 3 + (n-1)3$$
$$999 = 3n$$
$$n = 333$$

Jadi, banyak bilangan asli dari 1 hingga 1000 yang habis dibagi 3 adalah 333.

Dari barisan tersebut diketahui $a = 3$, $n = 333$, dan $u_n = u_{333} = 999$

$$S_n = \frac{n}{2}(a + u_n)$$
$$S_{333} = \frac{333}{2}(3 + 999) = 166.833$$

Jadi, jumlah bilangan asli dari 1 hingga 1000 yang habis dibagi 3 adalah 166.833.