

# Solusi Pengayaan Matematika

## Edisi 11

### Nomor Soal: 101-110

101. Jika  $N = 1 + 2 + 3 + \dots + 2005$ , maka jumlah angka-angka dari bilangan  $N$  adalah ....

- A. 20                      B. 15                      C. 13                      D. 12                      E. 10

**Solusi: [E]**

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n}{2}(n+1)$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + 2005 = \frac{2005}{2}(2005+1) = 2.011.015$$

Jadi, jumlah angka-angka bilangan  $N$  adalah  $2 + 0 + 1 + 1 + 0 + 1 + 5 = 10$ .

102. Jika  $1 + 2 + 3 + \dots + 1000 = a$  dan  $1 + 2 + 3 + \dots + 500 = b$ , maka jumlah dari  $1 + 3 + 5 + \dots + 999 = \dots$

- A.  $a - b$               B.  $2a - b$               C.  $a - 2b$               D.  $2b - a$               E.  $2a - 3b$

**Solusi: [C]**

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + \dots + 999 &= (1 + 2 + 3 + \dots + 1000) - (2 + 4 + 6 + \dots + 1000) \\ &= (1 + 2 + 3 + \dots + 1000) - 2(1 + 2 + 3 + \dots + 500) \\ &= a - 2b \end{aligned}$$

103. Suku negatif pertama dari barisan 500, 465, 430, 395, ... adalah ....

- A. -5                      B. -15                      C. -20                      D. -25                      E. -35

**Solusi: [D]**

$$a = 500, \quad b = 465 - 500 = -35$$

$$u_n = a + (n-1)b$$

$$u_n = 500 + (n-1)(-35)$$

$$u_n = 535 - 35n$$

$$\text{Jika } n = 16, \text{ maka } u_{16} = 535 - 35 \times 16 = -25$$

Jadi, suku negatif pertamanya adalah -25.

104. Diberikan barisan: (2), (4,6), (8,10,12), (14,16,18,20), (22,24,26,28,30), ...

Jumlah bilangan pada kelompok ke-21 adalah ....

- A. 2892              B. 2982              C. 8229              D. 8292              E. 9282

**Solusi: [E]**

$$\text{Jumlah bilangan sampai kelompok ke-21} = 1 + 2 + 3 + \dots + 21 = \frac{21}{2}(1+21) = 231.$$

$$\text{Suku terakhir pada kelompok ke-21} = 2 + (231-1)2 = 2 + 460 = 462$$

Suku pertama pada kelompok ke-21 adalah

$$462 = a + (21-1)2$$

$$a = 422$$

$$\text{Jumlah bilangan pada kelompok ke-21} = \frac{21}{2}(422 + 462) = 9282.$$

105. Pada suatu barisan geometri,  $S_n$  adalah jumlah  $n$  suku pertama. Jika  $S_9 = 5$  dan  $S_{18} = 25$ , maka nilai dari  $S_{27}$  adalah ....

A. 45            B. 60            C. 95            D. 105            E. 225

**Solusi: [D]**

$$\text{Jumlah } n \text{ suku pertama pada deret geometri adalah } S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}.$$

$$S_9 = \frac{a(r^9 - 1)}{r - 1} = 5$$

$$\frac{a}{r - 1} = \frac{5}{r^9 - 1} \dots (1)$$

$$S_{18} = \frac{a(r^{18} - 1)}{r - 1} = 25 \dots (2)$$

Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh

$$\frac{5}{r^9 - 1}(r^{18} - 1) = 25$$

$$\frac{5}{r^9 - 1}(r^9 - 1)(r^9 + 1) = 25$$

$$r^9 + 1 = 5$$

$$r^9 = 4$$

$$S_{27} = \frac{a(r^{27} - 1)}{r - 1} = \frac{5}{r^9 - 1}(r^{27} - 1) = \frac{5}{r^9 - 1}[(r^9 - 1)^3 + 3r^{18} - 3r^9]$$

$$= \frac{5}{r^9 - 1}[(r^9 - 1)^3 + 3r^9(r^9 - 1)]$$

$$= 5(r^9 - 1)^2 + 15r^9 = 5(4 - 1)^2 + 15 \cdot 4 = 45 + 60 = 105$$

106. Berapakah hasil dari  $100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \dots + 2^2 - 1^2$ ?

A. 1500            B. 2500            C. 4050            D. 5000            E. 5050

**Solusi: [E]**

Perhatikan pola berikut.

$$2^2 - 1^2 = (2 - 1)(2 + 1) = 3 = 1 + 2$$

$$4^2 - 3^2 = (4 - 3)(4 + 3) = 7 = 3 + 4$$

$$6^2 - 5^2 = (6 - 5)(6 + 5) = 11 = 5 + 6, \text{ dan seterusnya}$$

Sehingga dapat disimpulkan bentuk deret

$$100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \dots + 2^2 - 1^2 = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 97 + 98 + 99 + 100$$

$$= \frac{100(100+1)}{2} = 5050$$

107. Jumlah tiga buah bilangan asli yang berbentuk barisan geometri adalah 21 dan jumlah kuadratnya 189. Hasil kali bilangan-bilangan tersebut adalah ....  
 A. 108            B. 112            C. 216            D. 256            E. 288

**Solusi: [C]**

Ambillah bilangan-bilangan asli itu yang berupa barisan geometri adalah  $a, ar, ar^2$ ; sehingga

$$a + ar + ar^2 = 21$$

$$a = \frac{21}{1+r+r^2} \dots (1)$$

$$a^2 + a^2r^2 + a^2r^4 = 189$$

$$a^2(1+r^2+r^4) = 189 \dots (2)$$

Dari persamaan (1) dan (2), kita memperoleh:

$$\left(\frac{21}{1+r+r^2}\right)^2(1+r^2+r^4) = 189$$

$$7(1+r^2+r^4) = 3(1+r+r^2)^2$$

$$7+7r^2+7r^4 = 3(1+r^2+r^4+2r+2r^3+2r^2)$$

$$7+7r^2+7r^4 = 3+9r^2+3r^4+6r+6r^3$$

$$4r^4-6r^3-2r^2-6r+4=0$$

$$2r^4-3r^3-r^2-3r+2=0$$

$$(r-2)(2r^3+r^2+r-1)=0$$

$$r=2 \text{ (diterima) atau } 2r^3+r^2+r-1=0 \text{ (ditolak)}$$

$$r=2 \rightarrow a = \frac{21}{1+r+r^2} = \frac{21}{1+2+2^2} = 3$$

Bilangan-bilangan asli itu adalah 3, 6, 12.

Jadi, hasil kali ketiga bilangan tersebut adalah  $3 \times 6 \times 12 = 216$ .

108. Kita mengetahui bahwa  $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$  dan

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}. \text{ Andaikan } N = \frac{1^2 + 2^2 + \dots + 2017^2}{1 + 2 + \dots + 2017}, \text{ maka}$$

jumlah angka-angka bilangan  $N$  adalah ....

- A. 16            B. 15            C. 14            D. 13            E. 12

**Solusi: [D]**

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(n+1)}{2} \times \frac{2n+1}{3} = (1 + 2 + \dots + n) \times \frac{2n+1}{3}$$

$$\frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{1 + 2 + \dots + n} = \frac{\frac{n(n+1)}{2} \times \frac{2n+1}{3}}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{2n+1}{3}$$

$$N = \frac{1^2 + 2^2 + \dots + 2017^2}{1 + 2 + \dots + 2017} = \frac{2 \cdot 2017 + 1}{3} = 1345$$

Jadi, jumlah angka-angka bilangan N adalah  $1 + 3 + 4 + 5 = 13$ .

109. Jika  $\sum_{i=5}^{n+5} 4(i-3) = an^2 + bn + c$ , maka nilai dari  $a + b + c$  adalah ....

A. 2

B. 8

C. 10

E. 18

E. 20

**Solusi: [E]**

$$\sum_{i=5}^{n+5} 4(i-3) = an^2 + bn + c$$

$$4(5-3) + 4(6-3) + 4(7-3) + \dots + 4(n+5-3) = an^2 + bn + c$$

$$4[2 + 3 + 4 + \dots + (n+2)] = an^2 + bn + c$$

$$4[2 + 3 + 4 + \dots + (n+1)] + 4(n+2) = an^2 + bn + c$$

$$4 \times \frac{n}{2} [2 + (n+1)] + 4(n+2) = an^2 + bn + c$$

$$2n(n+3) + 4(n+2) = an^2 + bn + c$$

$$2n^2 + 10n + 8 = an^2 + bn + c$$

$$a = 2, b = 10, \text{ dan } c = 8$$

$$\therefore a + b + c = 2 + 10 + 8 = 20$$

110. Jika  $1, x, y$  adalah barisan geometri dan  $x, y, 3$  adalah barisan aritmetika, maka nilai maksimum dari  $x + y$  adalah ....

A. 0

B.  $\frac{3}{4}$

C.  $\frac{5}{2}$

D.  $\frac{15}{4}$

E.  $\frac{15}{2}$

**Solusi: [D]**

Dari barisan geometri  $1, x, y$  diperoleh

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{x} \text{ atau } y = x^2 \dots (1)$$

Dari barisan geometri  $x, y, 3$  diperoleh

$$y - x = 3 - y \text{ atau } 2y - x - 3 = 0 \dots (2)$$

Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh

$$2x^2 - x - 3 = 0$$

$$(2x - 3)(x + 1) = 0$$

$$x = \frac{3}{2} \text{ atau } x = -1$$

$$y = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} \text{ dan } y = (-1)^2 = 1$$

$$x + y = \frac{3}{2} + \frac{9}{4} = \frac{15}{4}$$

$$x + y = -1 + 1 = 0$$

Jadi, nilai maksimum  $x + y$  adalah  $\frac{15}{4}$ .