Solusi Pengayaan Matematika
Edisi 10

Nomor Soal: 91-100

91. Diberikan sistem persamaan $\begin{cases} \frac{1}{xy}+x+y=11 \\ x^2y^2(x+y)^2=61x^2y^2-1 \end{cases}$. Tentukan nilai dari $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$.

Solusi:

$\frac{1}{xy}+x+y=11$

$1+xy(x+y)=11xy$

$xy(x+y)=11xy-1$

$x^2y^2(x+y)^2=121x^2y^2-22xy+1$

$61x^2y^2-1=121x^2y^2-22xy+1$

$60x^2y^2-22xy+2=0$

$30x^2y^2-11xy+1=0$

$(6xy-1)(5xy-1)=0$

$xy=\frac{1}{6}$ atau $xy=\frac{1}{5}$

$xy=\frac{1}{6}\to\frac{1}{xy}+x+y=11$

$6+x+y=11$

$x+y=5$

$xy=\frac{1}{5}\to\frac{1}{xy}+x+y=11$

$5+x+y=11$

$x+y=6$

$$\left.\begin{matrix} xy=\frac{1}{6} \\ x+y=5 \end{matrix}\right\}\to\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x+y}{xy}=\frac{5}{\frac{1}{6}}=30$$

$$\left.\begin{aligned} xy &= \frac{1}{5} \\ x+y &= 6 \end{aligned}\right\} \rightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x+y}{xy}=\frac{6}{\frac{1}{5}}=30$$

Jadi, nilai dari $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ adalah 30.

92. Diberikan a, b, c, dan d adalah bilangan-bilangan real sedemikian sehingga $\begin{cases} a^2+b^2=1 \\ c^2+d^2=1 \\ ac+bd=0 \end{cases}$. Buktikan bahwa $ab+cd=0$.

Solusi:

$$ac+bd=0$$
$$ac=-bd$$
$$\frac{a}{b}=-\frac{d}{c}$$

Misalnya $\frac{a}{b}=-\frac{d}{c}=k$, maka $a=bk$ dan $d=-ck$.

$$a=bk \rightarrow a^2+b^2=1$$
$$(bk)^2+b^2=1$$
$$b^2(k^2+1)=1$$
$$b^2=\frac{1}{k^2+1} \quad \ldots. (1)$$

$$d=-ck \rightarrow c^2+d^2=1$$
$$c^2+(-ck)^2=1$$
$$c^2(k^2+1)=1$$
$$c^2=\frac{1}{k^2+1} \quad \ldots. (2)$$

Dari persamaan (1) dan (2), kita memperoleh: $b^2=c^2$

$$\left.\begin{aligned} a &= bk \\ d &= -ck \\ b^2 &= c^2 \end{aligned}\right\} \rightarrow ab+cd=(bk)b+c(-ck)=\left(b^2-c^2\right)k=(0)k=0 \text{ (qed)}$$

93. Diberikan x, y, dan z adalah bilangan-bilangan positif yang memenuhi sistem persamaan $\begin{cases} x+y=13 \\ y^2+z^2-yz=25 \\ x^2+z^2+xz=144 \end{cases}$

Tentukanlah nilai z.

Solusi:

$x+y=13 \rightarrow x=13-y$

$y^2+z^2-yz=25 \rightarrow \left(y-\frac{z}{2}\right)^2+\frac{3z^2}{4}=25 \ldots.(1)$

$x=13-y \rightarrow x^2+z^2+xz=144$

$(13-y)^2+z^2+(13-y)z=144$

$\left[13-\left(y-\frac{z}{2}\right)\right]^2+\frac{3z^2}{4}=144 \ldots.(2)$

Dengan mengurangkan persamaan (1) dari (2), maka kita memperoleh:

$\left[13-\left(y-\frac{z}{2}\right)\right]^2-\left(y-\frac{z}{2}\right)^2=119$

$\left[13-\left(y-\frac{z}{2}\right)+\left(y-\frac{z}{2}\right)\right]\left[13-\left(y-\frac{z}{2}\right)-\left(y-\frac{z}{2}\right)\right]=119$

$13\left[13-2\left(y-\frac{z}{2}\right)\right]=119$

$13-2\left(y-\frac{z}{2}\right)=\frac{119}{13}$

$y-\frac{z}{2}=-\frac{1}{2}\left(\frac{119}{13}-13\right)$

$y-\frac{z}{2}=\frac{25}{13}$

$y-\frac{z}{2}=\frac{25}{13} \rightarrow \left(y-\frac{z}{2}\right)^2+\frac{3z^2}{4}=25$

$\left(\frac{25}{13}\right)^2+\frac{3z^2}{4}=25$

$\frac{3z^2}{4}=25-\frac{625}{169}$

$z^2=\frac{4}{3}\left(\frac{3600}{169}\right)$

$z=\frac{40}{13}\sqrt{3}$

94. Tentukanlah himpunan penyelesaian dari sistem persamaan $\begin{cases} a^2+2bc=a \\ b^2+2ca=b \\ c^2+2ab=c \end{cases}$.

Solusi:

$a^2 + 2bc = a \Leftrightarrow a^3 + 2abc = a^2$ …. (1)

$b^2 + 2ca = b \Leftrightarrow b^3 + 2abc = b^2$ …. (2)

$c^2 + 2ab = c \Leftrightarrow c^3 + 2abc = c^2$ …. (3)

Dari (1) – (2) diperololeh: $a^3 - b^3 = a^2 - b^2$

$$(a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right) - (a-b)(a+b) = 0$$

$$(a-b)\left(a^2 + ab + b^2 - a - b\right) = 0$$

$a - b = 0$ atau $a^2 + ab + b^2 - a - b = 0$

$a = b$ atau $a^2 + ab + b^2 - a - b = 0$

Dari (1) – (3) diperololeh: $a^3 - c^3 = a^2 - c^2$

$$(a-c)\left(a^2 + ac + c^2\right) - (a-c)(a+c) = 0$$

$$(a-c)\left(a^2 + ac + c^2 - a - c\right) = 0$$

$a - c = 0$ atau $a^2 + ac + c^2 - a - c = 0$

$a = c$ atau $a^2 + ac + c^2 - a - c = 0$

Dari uraian di atas, kita memperoleh $a = b = c$.

$a^2 + 2bc = a$

$a^2 + 2a^2 = a$

$3a^2 - a = 0$

$a(3a - 1) = 0$

$a = 0$ atau $3a - 1 = 0$

$a = 0$ (ditolak) atau $a = \frac{1}{3}$ (diterima)

$a = b = c = \frac{1}{3}$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\left\{\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)\right\}$.

95. Tentukanlah nilai x, y, dan z dari sistem persamaan $\begin{cases} x(x+y) + z(x-y) = a \text{....}(1) \\ y(y+z) + x(y-z) = b \text{....}(2) \\ z(z+x) + y(z-x) = c \text{....}(3) \end{cases}$ dengan a, b, dan c adalah bilangan bulat positif.

Solusi:

Hasil dari penjumlah persamaan (1) dan (2) adalah

$x^2 + 2xy + y^2 = a + b$

$x + y = \sqrt{a+b}$ …. (4)

Hasil dari penjumlahan persamaan (1) dan (3) adalah

$y^2+2yz+z^2=b+c$

$y+z=\sqrt{b+c}$ …. (5)

Hasil dari penjumlahan persamaan (2) dan (3) adalah

$x^2+2xz+z^2=a+c$

$x+z=\sqrt{a+c}$ …. (6)

Hasil dari penjumlahan persamaan (4), (5), dan (6) adalah

$2(x+y+z)=\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{a+c}$

$x+y+z=\dfrac{\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{a+c}}{2}$ …. (7)

Dari persamaan (4) dan (7) kita memperoleh:

$$\sqrt{a+b}+z=\frac{\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{a+c}}{2}$$

$$z=\frac{-\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{a+c}}{2}$$

Dari persamaan (5) dan (7) kita memperoleh:

$$x+\sqrt{b+c}=\frac{\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{a+c}}{2}$$

$$x=\frac{\sqrt{a+b}-\sqrt{b+c}+\sqrt{a+c}}{2}$$

Dari persamaan (5) dan (7) kita memperoleh:

$$y+\sqrt{a+c}=\frac{\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{a+c}}{2}$$

$$y=\frac{\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}-\sqrt{a+c}}{2}$$

96. Tentukan pasangan (x,y,z) yang memenuhi sistem persamaan

$$\begin{cases} x^{-1}+y^{-1}+z^{-1}=9 \\ xy=12^{-1} \\ yz=8^{-1} \end{cases}$$

Solusi:

$xy\cdot yz=8^{-1}\cdot 12^{-1}$

$xy^2z=\dfrac{1}{96}$

$x^{-1}+y^{-1}+z^{-1}=9$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=9$$

$$\frac{yz+xz+xy}{xyz}=9$$

$$8^{-1}+xz+12^{-1}=9xyz$$

$$\frac{1}{8}+\frac{1}{96y^2}+\frac{1}{12}=9\cdot\frac{1}{96y}$$

$$\frac{20}{96}+\frac{1}{96y^2}=\frac{9}{96y}$$

$$20y^2-9y+1=0$$

$$(4y-1)(5y-1)=0$$

$$y=\frac{1}{4}\vee y=\frac{1}{5}$$

$$xy=\frac{1}{12}$$

$$x=\frac{1}{12y}=\frac{1}{12\cdot\frac{1}{4}}=\frac{1}{3}\vee x=\frac{1}{12y}=\frac{1}{12\cdot\frac{1}{5}}=\frac{5}{12}$$

$$yz=\frac{1}{8}$$

$$z=\frac{1}{8y}=\frac{1}{8\cdot\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}\vee z=\frac{1}{8y}=\frac{1}{8\cdot\frac{1}{5}}=\frac{5}{8}$$

Jadi, pasangan (x,y,z) adalah $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$ dan $\left(\frac{5}{12},\frac{1}{5},\frac{5}{8}\right)$.

97. Tentukan pasangan (x,y,z) yang memenuhi sistem persamaan $\begin{cases} xy+yz=5 \\ yz+xz=9 \\ xy+xz=8 \end{cases}$

Solusi:

$$\begin{cases} xy+yz=5....(1) \\ yz+xz=9....(2) \\ xy+xz=8....(3) \end{cases}$$

Jumlahkan ketiga persamaan tersebut sehingga diperoleh:

$$2xy+2yz+2xz=22$$

$$xy+yz+xz=11\ \ldots.\ (4)$$

Dari persamaan (1) dan (4) diperoleh

$$xz=6....(5)$$

Dari persamaan (2) dan (4) diperoleh

$xy = 2$....(6)

Dari persamaan (3) dan (4) diperoleh

$yz = 3$....(7)

Perkalian persamaan (5), (6), dan (7) adalah

$(xyz)^2 = 36$

$xyz = \pm 6$

$xyz = 6$ ....(8) atau $xyz = -6$ ....(9)

Dari persamaan (8) dan (5) diperoleh $y = 1$

Dari persamaan (8) dan (6) diperoleh $z = 3$

Dari persamaan (8) dan (7) diperoleh $x = 2$

Dari persamaan (9) dan (5) diperoleh $y = -1$

Dari persamaan (9) dan (6) diperoleh $z = -3$

Dari persamaan (9) dan (7) diperoleh $x = -2$

Jadi, pasangan (x, y, z) adalah $(2,1,3)$ dan $(-2,-1,-3)$.

98. Rata-rata aritmetika dari dua bilangan adalah 15 dan rata-rata geometrinya adalah 12. Tentukan bilangan tersebut.

Solusi:

Misalnya bilangan tersebut adalah *x* dan *y*.

Rata-rata aritmetika $\frac{x+y}{2} = 15$

$y = 30 - x$ .... (1)

Rata-rata gemetri $\sqrt{xy} = 12$

$xy = 144$ .... (2)

Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh

$x(30 - x) = 144$

$x^2 - 30x + 144 = 0$

$(x - 24)(x - 6) = 0$

$x = 24 \vee x = 6$

$y = 6 \vee y = 24$

Jadi, bilangan-bilangan tersebut adalah 24 dan 6.

99. Jika bilangan dua angka dibagi dengan hasil kali angka-angkanya menghasilkan 2 dan sisanya 5. Jika angka-angkanya dibalik dan bilangan ini dibagi dengan jumlah angka-angkanya maka hasilnya 7 dan sisanya 3. Tentukan bilangan tersebut.

Solusi:

Misalnya bilangan dua angka tersebut adalah *xy*.

$$\frac{10x+y}{xy}=2+\frac{5}{x+y}$$

$10x+y=2xy+5$ .... (1)

$$\frac{10y+x}{x+y}=7+\frac{3}{x+y}$$

$$10y+x=7\left(x+y\right)+3$$

$$3y-6x=3$$

$y=2x+1$ .... (2)

Dari (1) dan (2) diperoleh

$$10x+2x+1=2x\left(2x+1\right)+5$$

$$12x+1=4x^2+2x+5$$

$$4x^2-10x+4=0$$

$$2x^2-5x+2=0$$

$$\left(x-2\right)\left(2x-1\right)=0$$

$$x=2(\text{diterima})\,\text{atau}\,x=\frac{1}{2}(\text{ditolak})$$

$$x=2\to y=2\cdot 2+1=5$$

Jadi, bilangan dua angka tersebut adalah 25.

100. Tentukan bilangan dua angka yang jika dibagi dengan jumlah angka-angkanya menghasilkan 5 dan sisanya 9, sedangkan jika dibagi dengan hasil kali angka-angkanya menghasilkan 1 dan sisanya 18.

Solusi:

Misalnya bilangan dua angka tersebut adalah *xy*.

$$\frac{10x+y}{x+y}=5+\frac{9}{x+y}$$

$$10x+y=5(x+y)+9$$

$$5x-4y=9$$

$y=\frac{5x-9}{4}$ .... (1)

$$\frac{10x+y}{xy}=1+\frac{18}{xy}$$

$10x+y=xy+18$ .... (2)

Dari (1) dan (2) diperoleh

$$10x+\frac{5x-9}{4}=x\left(\frac{5x-9}{4}\right)+18$$

$$40x+5x-9=5x^2-9x+72$$

$$5x^2-54x+81=0$$

$$\left(x-9\right)\left(5x-9\right)=0$$

$$x=9(\text{diterima})\,\text{atau}\,x=\frac{9}{5}(\text{ditolak})$$

$$x=9\to y=\frac{5\cdot 9-9}{4}=9$$

Jadi, bilangan dua angka tersebut adalah 99.