

## Essay Panjang

1. [CK] Sebuah satelit geostasioner yang massanya 800 kg mengelilingi Bumi dalam orbit lingkaran. Tiba-tiba satelit itu ditabrak oleh sebuah meteoroid kecil yang massanya 120 kg. Dilihat dari Bumi, meteoroid itu bergerak di bidang langit dengan kecepatan 4,2 km/dt, dengan arah mirip dengan arah gerak satelit tapi membentuk sudut kira-kira  $30^\circ$  dengan arah gerak satelit itu. Setelah tabrakan, meteoroid itu melesak ke dalam satelit tapi tidak menghancurkannya. Apakah orbit satelit itu berubah? Jika berubah, tunkukkan secara kuantitatif perubahan orbitnya. Jika tidak berubah, tunjukkan secara kuantitatif dan berikan argumen bahwa pengaruh tumbukan meteoroid itu kecil sehingga dapat diabaikan terhadap orbit satelit. Diketahui massa Bumi adalah  $5,97 \times 10^{24}$  kg dan konstanta gravitasi  $G = 6,67 \times 10^{-11}$  Nm<sup>2</sup>/kg<sup>2</sup>.

Jawab:

Hitung radius orbit satelit geostasioner dengan menggunakan hukum Kepler 3.

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{GM_{\oplus}}{4\pi^2}$$

$$r^3 = \frac{6,67 \times 10^{-11} \times 5,97 \times 10^{24}}{4\pi^2} (24 \times 60 \times 60)^2$$

$$\text{Radius orbit satelit : } r = 4,222691 \times 10^7 \text{ meter}$$

$$\text{Kecepatan orbit satelit } v_s = \frac{2\pi r}{T} = 3071 \text{ m/dt}$$

$$\text{Momentum satelit } p_s = 800 \times 3071 = 2456800 \text{ kgm/dt}$$

Gerak meteoroid di bidang langit berarti sebidang dengan satelit, maka masalah tumbukannya merupakan masalah dua dimensi



$$\text{Sudut } \theta = 30^\circ$$

Untuk menghitung besar dan kecepatan satelit setelah tumbukan, gunakan penjumlahan vektor. Mula-mula uraikan vektor kecepatan meteoroid menjadi ke arah gerak satelit dan ke arah tegak lurus arah satelit.

Komponen  $v_m$  yang searah gerak satelit (sebut saja arah  $x$ ):

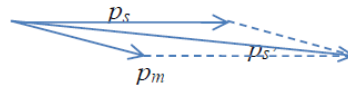
$$v_{mx} = v_m \cos \theta = 3637 \text{ m/dt}$$

Momentum meteoroid dalam arah  $x$  :  $p_{mx} = 120 \times 3637 = 436440 \text{ kgm/dt}$

Komponen  $v_m$  yang tegak lurus gerak satelit (sebut saja arah  $y$ ) :

$$v_{my} = v_m \sin \theta = 2100 \text{ m/dt}$$

Momentum meteoroid dalam arah  $y$  :  $p_{my} = 120 \times 2100 = 252000 \text{ kgm/dt}$



Terapkan hukum kekekalan momentum dalam arah  $x$

$$p_s + p_{mx} = (m_s + m_m)v'_{sx}$$

$$2456800 + 436440 = 920 v'_{sx}$$

$$v'_{sx} = 3145 \text{ m/s}$$

Terapkan hukum kekekalan momentum dalam arah  $y$

$$p_s + p_{my} = (m_s + m_m)v'_{sy}$$

$$0 + 252000 = 920 v'_{sy}$$

$$v'_{sy} = 274 \text{ m/s}$$

Besarnya kecepatan satelit setelah tumbukan

$$v'_s = \sqrt{v'^2_{sx} + v'^2_{sy}} = 3157 \text{ m/s}$$

Arah satelit yang baru  $\theta'$

$$\tan \theta' = \frac{274}{3154}$$

Maka  $\theta' \approx 5^\circ$ , artinya sekarang orbit satelit mempunyai inklinasi terhadap khatulistiwa sebesar  $5^\circ$

Bentuk orbitnya diperkirakan menjadi elips, lokasi tumbukan menjadi perigee satelit. Untuk menghitung periode orbit, gunakan teorema virial Energi mekanik total =  $E_p + E_k = 0,5 E_p$  pada pada posisi  $r=a$  :

$$-\frac{GM_\oplus m}{r} + \frac{1}{2}mv^2 = -\frac{GM_\oplus m}{2a}$$

Kedua ruas dibagi dengan  $m$  lalu keluarkan  $a$ :

$$\frac{1}{a} = \frac{2}{r} - \frac{v^2}{GM_{\oplus}}$$

Maka diperoleh

$$\frac{1}{a} = \frac{2}{42226910} - \frac{3157^2}{6,67 \times 10^{-11} \times 5,97 \times 10^{24}}$$

Maka setengah sumbu panjang menjadi : 44775093 m  $\approx$  447750km

Maka periode orbit menjadi  $T'$ , dapat dihitung dengan hukum Kepler III :

$$\frac{a^3}{T'^2} = \frac{GM_{\oplus}}{4\pi^2}$$

Diperoleh  $T' \approx$  26 jam 12 menit

Eksentrisitas dapat dihitung dengan menggunakan rumus perigee

$$r = a(1 - e)$$

$$42226910 = 44775093(1 - e)$$

Eksentrisitas :  $e = 0,0569$

2. [MR] Pada tahap awal, nebula mengalami kondisi runtuh gravitasi. Beberapa proses harus dilalui untuk pembentukan kumpulan/gugus bintang. Awan antar bintang dengan massa dan radius yang sangat besar, dengan jumlah partikel  $N$  dan massa tiap partikel,  $m$ , memulai kondensasi menjadi gumpalan. Di lingkungan awan antar bintang yang mulai runtuh gravitasi, energi potensial gravitasi,  $|E_{Gr}|$ , masih dalam kondisi lebih besar dari energi kinetik,  $E_{kin}$ . Energi termal awan antar bintang berasal dari energi kinetik tiap partikel yang sebanding dengan  $3kT/2$ . Bila massa nebula adalah 1000 kali massa Matahari, temperatur nebula  $T \approx 20$  K, massa partikel  $m \approx$  massa atom hidrogen, hitung kerapatan awan antar bintang tersebut! Bantuan: energi potensial gravitasi suatu benda yang mengalami runtuh gravitasi adalah:

Jawab:

**Step 1 [35 point]** : Kondisi  $|E_{Gr}| > E_{kin}$ ;  $E_{Gr} = -f (GM^2/R)$ ,  $E_{kin} = (3/2) NkT = (3/2) (M/m) kT$ .  $(GM^2/R) = (3/2) (M/m) kT$  atau  $M = (3 kT/2Gm) R$  atau  $(1/R) = (3 kT/2M Gm)$ . Awan dengan massa  $M$  dan radius  $R$  dapat berkondensasi, bila massa partikel dalam Nebula,  $m \approx$  massa atom hydrogen ( $1,6735 \times 10^{-27}$  kg),  $M = N m$ .  $MJ = (3 kT/2Gm) R$ ;

**Step 2 [35]** : (**M harus melebihi suatu massa kritis**)  $MJ =$  massa Jeans atau massa kritis dan awan dalam radius  $R$  mempunyai kerapatan melebihi  $\rho_J = (3/4\pi M^2) (3kT/2Gm)^3$ ,  $k =$  konstanta Boltzmann  $k = 1.36 \times 10^{-23}$  JK<sup>-1</sup>,  $G = 6.672 \times 10^{-11}$  Nm<sup>2</sup> kg<sup>-2</sup>.  $M = (4 \pi /3) R^3 \rho$  atau  $\rho = (3 M/ 4 \pi) R^{-3}$ ; karena  $(1/R) = (3 kT/2M Gm)$  maka  $\rho = (3 M/ 4 \pi) (3 kT/2M Gm)^3$ ;  **$\rho_J = (3/4\pi M^2) (3kT/2Gm)^3$** .

$t_{ff} = (3 \pi/32 G \rho)^{(1/2)}$ ,  $G = 6.672 \times 10^{-11}$  Nm<sup>2</sup> kg<sup>-2</sup>,  $E_{Gr} = -f (GM^2/R)$ ,  $f = 3/5$  untuk yang uniform; Energi Nebula merupakan kontribusi energi setiap partikel dalam nebula,  $3/2 kT$ ,  $E_{kin} = (3/2) NkT$ .

**Step 3 [30]** :  **$\rho_J = (3/4\pi M^2) (3kT/2Gm)^3$** .  **$\rho_J = (3/ (4\pi M^2)) (3kT/2Gm)^3$** .  $M_{sun} = 1,989 \times 10^{30}$  kg ;  $(3/ (4\pi M^2)) = 6.034507404 \times 10^{-66}$ ,  **$(3kT/2Gm)^3 = 4.879049523 \times 10^{46}$** ,  **$\rho_J = (3/ (4\pi M^2)) (3kT/2Gm)^3 = 2.944266047 \times 10^{-19}$  kg/m<sup>3</sup>**,

Kerapatan rata – rata awan mempunyai nilai yang rendah. Kondisi tersebut lebih mudah dapat dicapai oleh awan antar bintang dengan massa  $M$  yang lebih besar.

3. [MR] Dua buah teleskop, A dan B bekerja dengan kondisi jangkauan jarak zenit maksimum 70 derajat untuk teleskop A dan jarak zenit maksimum 60 derajat untuk teleskop B. Hitung perbandingan luas langit yang dicakup teleskop A terhadap teleskop B! Diketahui sudut eksis segitiga bola

dan luas segitiga bola

**Jawab:**

**Step 1 [40 point]** : (diskripsi penyelesaian dan rumus yang akan dipergunakan)

$$\tan^2 (E/4) = \tan (s/2) \tan ((s-a)/2) \tan ((s-b)/2) \tan ((s-c)/2) \text{ atau}$$

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

$$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B$$

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C$$

$$E = A + B + C - 180^\circ$$

$$S = \pi R^2 E / 180^\circ \text{ atau } (S/R^2) = \pi E / 180^\circ$$

**Step 2 [40 point]** : Perhitungan

Teleskop A dengan jangkauan jarak zenith =  $70^\circ$ , maka segitigabola untuk  $\frac{1}{4}$  luas langit yang dilingkup adalah zenith = C, A dan B maka sisi – sisi dihadapan sudut bola A, B dan C adalah  $a = 70^\circ$ ,  $b = 70^\circ$  dan  $c = 90^\circ$ .

$$\tan^2 (E/4) = \tan (s/2) \tan ((s-a)/2) \tan ((s-b)/2) \tan ((s-c)/2)$$

$$2s = 70^\circ + 70^\circ + 90^\circ = 230^\circ \text{ maka } s = 115^\circ; (s-a) = 45^\circ, (s-b) = 45^\circ \text{ dan } (s-c) = 25^\circ$$

$$\tan^2 (E/4) = 0.05970580176 \text{ atau } \tan (E/4) = 0.2443477067 \text{ atau } (E/4) = 13^\circ 43' 51''.74$$

$$E = 54^\circ 55' 26''.95; (S/ \pi R^2) = 0.3051341787$$

Teleskop B dengan jangkauan jarak zenith =  $60^\circ$ , maka sisi – sisi dihadapan sudut bola A, B dan C adalah  $a = 60^\circ$ ,  $b = 60^\circ$  dan  $c = 90^\circ$ .

$$2s = 60^\circ + 60^\circ + 90^\circ = 210^\circ \text{ maka } s = 105^\circ; (s-a) = 45^\circ, (s-b) = 45^\circ \text{ dan } (s-c) = 15^\circ$$

$$\tan^2 (E/4) = 0.02943725152 \text{ atau } \tan (E/4) = 0.1715728753 \text{ atau } (E/4) = 9^\circ 44' 8''.2$$
$$E = 38^\circ 56' 32''.79; (S/\pi R^2) = 0.2163468959$$

**Step 3 [20 point] :**

Perbandingan luas langit yang bisa dilingkup teleskop B terhadap teleskop A adalah  $(0.2163468959/0.3051341787) = 0.7090221648$  atau perbandingan luas langit yang bisa dilingkup teleskop A terhadap teleskop B adalah 1.410393144.

4. [MR] Seorang pengamat berada di sebuah planet/asteroid padat yang mengorbit sebuah bintang. Pengamat tersebut mengamati diameter sudut bintang, dan diketahui diameter sudut minimal

$$\theta_{\min} = 841,1710243''$$

diameter sudut maksimal

$$\theta_{\max} = 2982,333632''$$

Hitung kecepatan ketika planet berada pada jarak 70% dari jarak apastron! Diketahui

diameter bintang  $D_{\text{bin}} = 1400000$  km dan  $(a^3 / T^2) = \text{konstan} \approx 7,5 \text{ (au}^3 / \text{hari}^2) \times 10^{-6}$ .

**Jawab:**

**Step 1 [30 point] :**

$\vartheta_A = 841.1710243''$ , Diameter sudut bintang  $\vartheta_A = (D_{\text{bin}}/d_{\text{bin}}) \times 206265''$  atau  $d_A = (D_{\text{bin}}/\vartheta_A) \times 206265''$ ; bila  $D_{\text{bin}} = 1400000$  km dan  $d_A = 343296418.5$  km;  $d_A = (1 + e) a$ ;

diameter sudut bintang  $\vartheta_P = (D_{\text{bin}}/d_{\text{bin}}) \times 206265''$ ;  $d_P = (D_{\text{bin}}/\vartheta_P) \times 206265''$  bila  $D_{\text{bin}} = 1400000$  km dan  $\vartheta_P = 2982.333632''$  maka  $d_P = 96827194.95$  km,

$a = (d_A + d_P) / 2 = (343296418.5 + 96827194.95) \text{ km} = 440123613.5 \text{ km} / 2 = 220061806.7$  km = 1.471001382 au;  $d_P = (1 - e) a$ ;  $d_{\text{bin} P} = 96827194.95$  km;  $e = 0.56$

**Step 2 [40 point] :**

Momentum sudut  $p = mvr$ ,  $m = \text{massa}$ ,  $v = \text{kecepatan}$ ,  $r$  jarak, momentum sudut persatuan massa  $H = (p/m) = rv$  dapat ditulis  $H/2 = rv/2$  atau  $v = H/r$

Definisikan  $H/2 = A/T$ ;  $A = \text{luas ellips} = \pi ab$  dan  $T = \text{periode orbit}$  (bila seluruh ellips ditempuh maka total luasnya adalah luas ellips =  $\pi ab$ .  $A = \text{setengah sumbu panjang ellips}$  dan  $b = \text{setengah sumbu pendek ellips}$ ,  $b^2 = a^2 - (ae)^2$  atau  $b^2 = a^2 (1 - e^2)$  atau  $b^2 = a^2 (1 - e) (1 + e)$  atau  $b = a (1 - e)^{(1/2)} (1 + e)^{(1/2)}$

Bila disubstitusikan  $v = H/r = (2 A/T) (1/r) = (2 \pi ab/T)(1/r) = [(2 \pi a \times a (1 - e)^{(1/2)} (1 + e)^{(1/2)}) / T](1/r)$

Di Perihelion  $r_p = a (1 - e)$  maka  $v_p = [(2 \pi a/T) \times (1 - e)^{(-1/2)} (1 + e)^{(1/2)}$

Di Aphelion  $r_a = a (1 + e)$  maka  $v_a = [(2 \pi a/T) \times (1 + e)^{(-1/2)} (1 - e)^{(1/2)}$

Hukum 2 Kepler :  $(1/2) r_p v_p = (1/2) r_a v_a$

Secara umum :  $ra va = r v$ ;  $v = ra va/r$ ;  $(r/ra) = 0.7$

Setengah sumbu panjang  $a = 1.471001382 \text{ au} = 220061806.7 \text{ km}$ ,  $70\% \times a = 154043264,7 \text{ km}$   
 $= 1.029700967 \text{ au}$

$$va = (2 \pi a/T) [(1 - e) / (1 + e)]^{(1/2)} = 598637.1041 \text{ km/hari}$$

$$T^2 = 4 \pi^2 a^3 / G (M + mp) \text{ atau } (a^3/T^2) = \text{konstan} \approx 7.5 (au^3/\text{hari}^2) \times 10^{-6}.$$

$$T \approx ((1.471001382)^3 / (7.5 \times 10^{-6}))^{(1/2)} \text{ hari} = 651.4618518 \text{ hari}$$

$$e = 0.56; [(1 - e) / (1 + e)]^{(1/2)} = 0.2820512821$$

$$a = 1.471001382 \text{ au} = 220061806.7 \text{ km}$$

**Step 3 [30 point] :**

$$(va = (2 \pi a/T) [(1 - e) / (1 + e)]^{(1/2)} = 598637.1041 \text{ km/hari}$$

$$ra = 343296418.5 \text{ km}; r = 0.7 \text{ ra maka } v = [598637.1041 \text{ km/jam}] \times (0.7) = 419045.9729 \text{ km/hari.}$$



5. [IR] Planet Kepler-16ab mengedari dua bintang induk, bintang Kepler-16A ( $M = 0,69 M_{\odot}$ ) dan bintang Kepler-16B ( $M = 0,20 M_{\odot}$ ). Sistem itu berjarak 200 tahun cahaya dari Matahari. Planet Kepler-16ab berukuran Saturnus mengorbit bintang Kepler-16A pada jarak 0,7 sa. Periode rotasi planet sama dengan periode orbitnya. Bintang Kepler-16B mengorbit Kepler-16A pada jarak 0,2 sa. Diameter kedua bintang masing-masing adalah 890000 km dan 300000 km. Jika orang berada di planet Kepler-16ab, tentukan
- Pada saat separasi maksimum, berapa jarak sudut terbesar kedua bintang itu dan berapa diameter sudut masing-masing bintang (yang dilihatnya) dinyatakan dalam satuan diameter sudut Matahari!
  - Berapa periode planet mengedari Kepler-16A?
  - Berapa periode Kepler-16B mengedari Kepler-16A?
  - Jika awalnya pengamat melihat di meridian, Kepler-16B melintas tepat di pusat Kepler-16A (menggerhanai), tentukan selang waktu kedua bintang mencapai separasi maksimum.
- Asumsikan semua orbit objek sebidang dan berbentuk lingkaran.

Jawab:

Separasi terbesar saat planet di satu titik segitiga [sama kaki], berjarak 105juta km dari Kepler A, dan sisi segitiga yang lain, Kepler A berjarak 30juta km dari Kepler B. Maka dari  $\tan(\theta) = 30\text{juta}/105\text{juta} = 0,286$ . Dari  $\arctan(0,286) = 16$  derajat. Diameter sudut masing-masing,  $\tan\theta = 0,89\text{km}/105\text{km}$ , samadengan  $0,49$  derajat dan  $\tan\theta = 0,3\text{km}/109\text{km}$ , jadi  $0,16$  derajat.

[segitiga siku-siku]

$$D^2 = 105^2 + 30^2 = 109\text{juta km.}$$

$$P_B = [(0,2)^3]^{1/2} \text{ dan } P_{ab} = [(0,7)^3]^{1/2} -$$

→ hitung ulang dengan rumus umum Huk. Kepler 3

$$P_B = 0,09 \text{ tahun, } P_{ab} = 0,58 \text{ tahun}$$

Beda kecepatan sudut antara Kepler-16ab dan Kepler-16B adalah:

$$2\pi/P_{ab} - 2\pi/P_B$$

Maka selang waktu planet melihat keduanya berada pada separasi maksimum adalah:

$$(16/180)\pi / (2\pi/P_{ab} - 2\pi/P_B) = 0,088\pi / (10,83 - 69,81) = -0,00468 \text{ tahun} = 1,7 \text{ hari}$$