

JAWABAN SOAL FISIKA OSN 2010

Medan, 1 – 7 Agustus 2010

- 1- Gaya-gaya yang bekerja pada bola ditunjukkan pada gambar disamping. Persamaan gerak untuk pusat massa bola adalah

$$m(a + b) \alpha_\theta = mg \sin \theta - f \quad (1)$$

$$m(a + b) \omega_\theta^2 = mg \cos \theta - N \quad (2)$$

dan pada bola yang berotasi berlaku

$$\frac{2}{5} m a^2 \alpha_\varphi = f a \quad (3)$$

Syarat agar bola menggelinding tanpa slip

$$(a + b) \omega_\theta = a \omega_\varphi \quad \text{atau} \quad (a + b) \alpha_\theta = a \alpha_\varphi \quad (4)$$

(nilai 4)

Dari (3) dan (4) kita dapatkan

$$f = \frac{2}{5} m (a + b) \alpha_\theta$$

Substitusikan ke (1), kita dapatkan

$$\alpha_\theta = \frac{5 g \sin \theta}{7 (a + b)} \quad (nilai 2)$$

- (a) Karena pada $t = 0$ nilai $\theta = \omega_\theta = 0$ dan $\alpha_\theta = \frac{1}{2} \frac{d^2 \theta}{dt^2}$, maka

$$\omega_\theta^2 = \frac{10 g (1 - \cos \theta)}{7 (a + b)}$$

Substitusikan ia ke (2) akan memberikan

$$N = mg \cos \theta - \frac{10}{7} mg (1 - \cos \theta) = mg \left(\frac{17 \cos \theta}{7} - \frac{10}{7} \right)$$

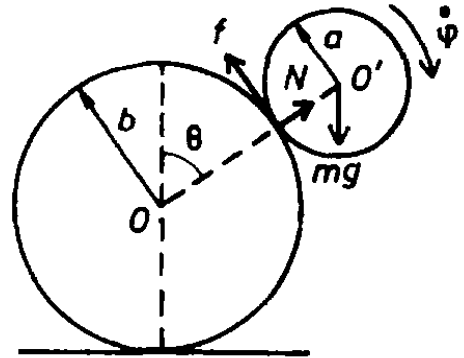
Setelah bola meninggalkan silinder, $N = 0$. Sehingga $\theta = \theta_{max}$ dan

$$\cos \theta_{max} = \frac{10}{17} \quad (nilai 5)$$

- (b) Pada saat bola meninggalkan silinder, besarnya kecepatan pusat bola adalah

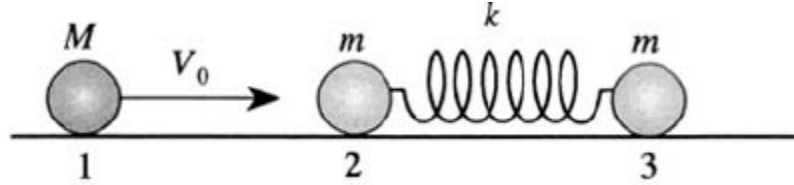
$$v = (a + b) \omega_\theta = \sqrt{\frac{10}{17} g (a + b)}$$

dan arahnya sejajar dengan arah tangensial pada titik dimana $\theta = \theta_{max}$. (nilai 4)



2- Jawaban:

- a) Untuk memudahkan kita sebut saja bola massa M sebagai bola 1, bola yang ditumbuk pada sistem dua bola sebagai bola 2, dan bola satunya lagi sebagai bola 3 (lihat gambar bawah). Setelah tumbukan yang pertama, bola 1 akan bergerak dengan kecepatan konstan V_1 sedangkan bola 2 and 3 akan beresilasi. Untuk tumbukan lain yang terjadi, koordinat bola 1 dan bola 2 harus sama. Pertama tentukan dulu V_1 setelah tumbukan awal, perhatikan tumbukan hanya sesaat. Kemudian perlakukan tumbukan ini sama dengan tumbukan hanya antar dua bola massa M dan m saja. Jika kecepatan bola pertama sebelum tumbukan adalah V_0 maka kita dapat menentukan V_1 and V_2 dari persamaan kekekalan energi dan kekekalan momentum:



$$MV_0 = MV_1 + mV_2 \quad (1)$$

$$\frac{MV_0^2}{2} = \frac{MV_1^2}{2} + \frac{mV_2^2}{2} \quad (2)$$

Kemudian dari substitusi (1) ke (2) kita juga dapatkan bahwa

$$V_1 = \frac{M-m}{M+m} V_0 = \frac{1-\gamma}{1+\gamma} V_0 \quad (3)$$

$$V_2 = \frac{2M}{M+m} V_0 = \frac{2}{1+\gamma} V_0 \quad (4)$$

$$\gamma \equiv \frac{m}{M}$$

Setelah tumbukan bola pertama M akan bergerak dengan kecepatan konstan V_1 maka koordinat posisinya adalah

$$x_1 = V_1 t = V_0 t (1-\gamma)/(1+\gamma). \quad (\text{nilai 4})$$

Pusat massa bola 2 dan 3 juga akan bergerak dengan kecepatan konstan $V_c = V_2/2$ (karena $m_2 = m_3 = m$). Dengan demikian dari persamaan (4) kita dapatkan

$$x_c = \frac{V_0}{1+\gamma} \cdot t \quad (\text{nilai 2})$$

Sekarang kita lihat dalam kerangka pusat massa bola 2 dan 3. Kedua bola masing-masingnya bergerak ke arah salah satu lainnya dengan laju dan posisinya memenuhi persamaan osilasi relatif terhadap pusat massanya sebagai fungsi waktu yang berbentuk:

$$x_{2,3}(t) = A \sin \omega t$$

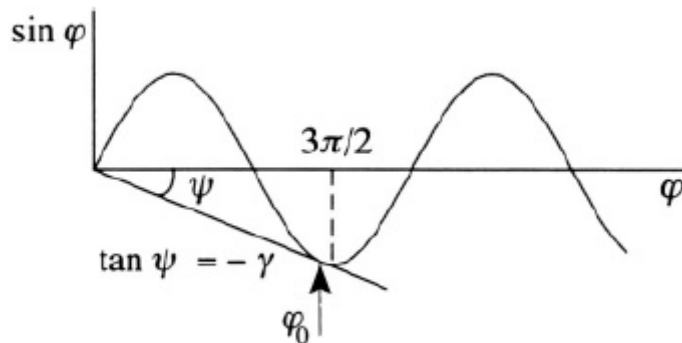
dengan $\omega = \sqrt{k'/m}$ dan k' adalah konstanta pegas yang setengah pegas, $k' = 2k$. Dari hukum kekekalan energi, energi mula-mula massa 2 dalam kerangka pusat massa berubah menjadi energi deformasi pegas dengan suatu amplitudo yang berkorelasi dengan perubahan kecepatan dari $V_2/2$ menjadi nol:

$$\frac{m (V_2/2)^2}{2} = \frac{m V_0^2}{2 (1 + \gamma)^2} = \frac{k' A^2}{2}$$

Jadi
$$A = \sqrt{m V_0^2 / k' (1 + \gamma)^2} = \frac{V_0}{(1 + \gamma)\omega}$$

Dalam kerangka lab

$$x_2(t) = x_c(t) + A \sin \omega t = \frac{V_0 t}{1 + \gamma} + \frac{V_0}{(1 + \gamma)\omega} \sin \omega t$$



(nilai 2)

Untuk tumbukan yang kedua kalinya, kita perlukan $x_1 = x_2$ atau,

$$\frac{1 - \gamma}{1 + \gamma} V_0 t = \frac{V_0 t}{1 + \gamma} \left(1 + \frac{\sin \omega t}{\omega t} \right) \quad (5)$$

Maka kita dapatkan,

$$\frac{\sin \omega t}{\omega t} \equiv \frac{\sin \varphi}{\varphi} = -\gamma \quad (6)$$

Untuk menyelesaikan pers (6) diatas, cara termudah adalah dengan menggunakan grafik diatas. Untuk solusi yang eksis kita dapatkan suatu kondisi $\gamma \leq \gamma_{max}$ dengan

$$\gamma_{max} \approx \frac{1}{3\pi/2} \approx 0,2$$

pada $\varphi_0 \approx 3\pi/2$. Harga minimum massa $M \approx \frac{m}{\gamma_{max}} \approx 10 \text{ kg}$. (nilai 3)

b) Waktu antar tumbukan adalah:

$$\begin{aligned} t_0 &= \frac{\varphi_0}{\omega} \approx \frac{3\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{k'}} \\ &= \frac{3\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{2k}} \approx 5 \text{ s} \end{aligned}$$

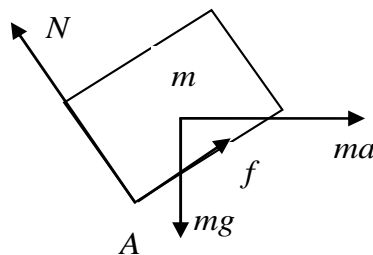
(nilai 4)

- 3- Agar balok bisa bergerak bersama-sama bidang miring dan tidak bergerak translasi ke atas maupun ke bawah, maka dengan menggunakan Hukum I dan II Newton dipenuhi persyaratan,

$$(M + m) \left(\frac{\sin \theta - \mu_s \cos \theta}{\cos \theta + \mu_s \sin \theta} \right) g \leq F \leq (M + m) \left(\frac{\sin \theta + \mu_s \cos \theta}{\cos \theta - \mu_s \sin \theta} \right) g \quad (1) \quad (\text{nilai 10})$$

Untuk gerak rotasi balok kita gunakan Hukum I Newton dalam torsi, yaitu $\sum \vec{\tau} = 0$.

Apabila balok cenderung menggeling ke bawah, maka



Torsi terhadap titik A:

$$mg \sin \theta \left(\frac{1}{2} l \right) - ma \cos \theta \left(\frac{1}{2} l \right) - (mg \cos \theta + ma \sin \theta) \left(\frac{1}{2} l \right) = 0 \quad \text{atau}$$

$$a = \left(\frac{t \sin \theta - l \cos \theta}{t \cos \theta + l \sin \theta} \right) g$$

Dengan mensubstitusikan pertidaksamaan

$$a \geq \left(\frac{\sin \theta - \mu_s \cos \theta}{\cos \theta + \mu_s \sin \theta} \right) g \quad (\text{dari syarat agar balok tidak bertranslasi ke bawah}) \text{ ke dalam (2),}$$

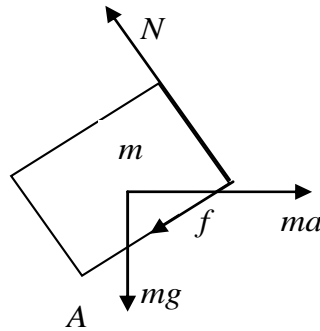
diperoleh

$$\left(\frac{t \sin \theta - l \cos \theta}{t \cos \theta + l \sin \theta} \right) \geq \left(\frac{\sin \theta - \mu_s \cos \theta}{\cos \theta + \mu_s \sin \theta} \right) \quad (3)$$

sehingga diperoleh

$$\mu_s \geq \frac{l}{t} \quad (4) \quad (\text{nilai 5})$$

Apabila balok cenderung mengelinding ke atas, maka



Torsi terhadap titik A:

$$mg \sin \theta \left(\frac{1}{2}t\right) - ma \cos \theta \left(\frac{1}{2}t\right) + (mg \cos \theta + ma \sin \theta) \left(\frac{1}{2}l\right) = 0 \text{ atau}$$

$$a = \left(\frac{t \sin \theta + l \cos \theta}{t \cos \theta - l \sin \theta} \right) g \quad (2)$$

Dengan mensubstitusikan pertidaksamaan

$$a \leq \left(\frac{\sin \theta + \mu_s \cos \theta}{\cos \theta - \mu_s \sin \theta} \right) g \text{ (yang merupakan syarat agar balok tidak bertranslasi ke atas) ke}$$

dalam persamaan (2) diatas, diperoleh

$$\left(\frac{t \sin \theta + l \cos \theta}{t \cos \theta - l \sin \theta} \right) \leq \left(\frac{\sin \theta + \mu_s \cos \theta}{\cos \theta - \mu_s \sin \theta} \right) \quad (5) \quad (\text{nilai 3})$$

sehingga diperoleh kembali (4).

Jadi persyaratan agar balok bergerak bersama-sama bidang miring adalah:

$$(M + m) \left(\frac{\sin \theta - \mu_s \cos \theta}{\cos \theta + \mu_s \sin \theta} \right) g \leq F \leq (M + m) \left(\frac{\sin \theta + \mu_s \cos \theta}{\cos \theta - \mu_s \sin \theta} \right) g$$

Dan syarat agar balok tidak menggelinding maka $\mu_s \geq \frac{l}{t}$ (nilai 2)

4- Jawaban

a- Kecepatan tangensial:

$$v_t(r, t) = \omega r + V \sin \omega t \quad (\text{suku-1 dari rotasi, suku-2 dari revolusi})$$

(nilai 2)

b- Gaya angkat per satuan panjang: $f(r, t) = c\omega r + cV \sin \omega t$

Gaya angkat rata-rata per satuan panjang pada sayap-1:

$$\bar{f}_1 = \frac{f(0, t) + f(b, t)}{2} = \frac{c\omega \cdot 0 + cV \sin \omega t + c\omega b + cV \sin \omega t}{2} = \frac{1}{2} c\omega b + cV \sin \omega t$$

Dari sayap ke sayap berbeda sudut fase $\pi/2$. Maka

Pada sayap-2:
$$\bar{f}_2 = \frac{1}{2} c\omega b + cV \sin(\omega t + \pi/2) = \frac{1}{2} c\omega b + cV \cos \omega t$$

Pada sayap-3:
$$\bar{f}_3 = \frac{1}{2} c\omega b + cV \sin(\omega t + \pi) = \frac{1}{2} c\omega b - cV \sin \omega t$$

Pada sayap-4:
$$\bar{f}_4 = \frac{1}{2} c\omega b + cV \sin(\omega t + 3\pi/2) = \frac{1}{2} c\omega b - cV \cos \omega t$$

Gaya angkat rata-rata per satuan panjang total:
$$\bar{f}_{tot} = \bar{f}_1 + \bar{f}_2 + \bar{f}_3 + \bar{f}_4 = 2c\omega b$$

Gaya angkat total:
$$F = \bar{f}_{tot} b = 2c\omega b^2 \quad (\text{nilai 4})$$

c- Momen gaya per satuan panjang: $\vec{n}(r, t) = \vec{r} \times \vec{f}(r, t)$

Misalkan arah $\vec{f}(r, t)$ pada sumbu-x sehingga:
$$\vec{f}(r, t) = \hat{x}(\omega r + cV \sin \omega t)$$

dan \vec{r} pada bidang-yz sehingga:
$$\vec{r} = \hat{y}r \cos \omega t + \hat{z}r \sin \omega t$$

sehingga momen gaya per satuan panjang pada sayap-1

$$\begin{aligned} \vec{n}_1 &= (\hat{y}r \cos \omega t + \hat{z}r \sin \omega t) \times \hat{x}(\omega r + cV \sin \omega t) \\ &= -\hat{z}r \cos \omega t(\omega r + cV \sin \omega t) + \hat{y}r \sin \omega t(\omega r + cV \sin \omega t) \end{aligned}$$

Pada sayap-2:
$$\vec{n}_2 = \hat{z}r \sin \omega t(\omega r + cV \cos \omega t) + \hat{y}r \cos \omega t(\omega r + cV \cos \omega t)$$

Pada sayap-3:
$$\vec{n}_3 = \hat{z}r \cos \omega t(\omega r - cV \sin \omega t) - \hat{y}r \sin \omega t(\omega r - cV \sin \omega t)$$

Pada sayap-4:
$$\vec{n}_4 = -\hat{z}r \sin \omega t(\omega r - cV \cos \omega t) - \hat{y}r \cos \omega t(\omega r - cV \cos \omega t)$$

Momen gaya per satuan panjang total: $\vec{n}_{tot} = \vec{n}_1 + \vec{n}_2 + \vec{n}_3 + \vec{n}_4 = \hat{y}2cVr$

Besar momen gaya rata-rata per satuan panjang: $\bar{n} = \frac{0 + 2cVb}{2} = cVb$

Momen gaya total: $\vec{N} = \hat{y}\bar{n}b = \hat{y}cVb^2$ **(nilai 5)**

d- Momentum angular rotasi: $\vec{L} = I\vec{\omega}$

Momen inersia bumerang: $I = 4\frac{1}{3}(M/4)b^2 = \frac{1}{3}Mb^2$

maka $L = \frac{1}{3}Mb^2\omega$ **(nilai 2)**

e- Kecepatan sudut revolusi: $\omega_0 = \frac{N}{L} = \frac{cVb^2}{\frac{1}{3}Mb^2\omega} = \frac{3cV}{M\omega}$ **(nilai 2)**

f- Jari-jari revolusi: $V = \omega_0 R \rightarrow R = \frac{V}{\omega_0} = \frac{V}{3cV/M\omega} = \frac{M\omega}{3c}$ **(nilai 2)**

g- Gaya total = gaya sentripetal, sehingga:

$$F = \frac{MV^2}{R} \rightarrow 2c\omega b^2 = \frac{MV^2}{R} \rightarrow$$

$$V^2 = \frac{2c\omega b^2}{M} \frac{M\omega}{3c} = \frac{2}{3}\omega^2 b^2 \rightarrow V = \sqrt{\frac{2}{3}} \omega b$$

(nilai 3)

5- Jawaban

- a- Pendekatan jarak d kecil dibandingkan dengan radius rata R silinder berarti bahwa kita dapat menggunakan pendekatan plat sejajar untuk menghitung kapasitas kapasitor karena luas elektroda (A) tidak jauh berbeda.

$$C_0 = \frac{\epsilon_0 A}{d} \quad \text{atau} \quad C_0 = \frac{\epsilon_0 2\pi R l}{d} \quad (\text{nilai 5})$$

- b- Energi yang disimpan sebelum air masuk:

$$U_0 = \frac{1}{2} C_0 V^2$$

$$U_0 = \frac{\epsilon_0 2\pi R l}{2d} V^2 \quad \rightarrow \quad U_0 = \frac{\epsilon_0 \pi R l V^2}{d} \quad (\text{nilai 3})$$

- c- Setelah air masuk, kapasitas kapasitor menjadi:

$$C = \frac{\epsilon \epsilon_0 2\pi R h}{d} + \frac{\epsilon_0 2\pi R (l - h)}{d}$$

$$C = \frac{\epsilon_0 2\pi R}{d} \{l + (\epsilon - 1)h\} \quad (\text{nilai 3})$$

- d- Energi total termasuk gravitasi dapat dituliskan:

$$U = \frac{1}{2} C V^2 + mg \frac{h}{2} \quad (\text{nilai 2})$$

(anggap air homogen, sehingga pusat massa berada pada $h/2$)

Masukkan C dan m (=kerapatan x volume) yang ada, diperoleh:

$$U = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 2\pi R}{d} \{l + (\epsilon - 1)h\} V^2 + \rho (2\pi R h d) g \frac{h}{2}$$

atau

$$U = \frac{\epsilon_0 \pi R}{d} \{l + (\epsilon - 1)h\} V^2 + \rho (\pi R d) g h^2 \quad (\text{nilai 2})$$

Energi ini minimum bila $\frac{dU}{dh} = 0$ atau (nilai 2)

$$\frac{\epsilon_0 \pi R}{d} (\epsilon - 1) V^2 + 2\rho (\pi R d) g h - 0$$

$$\frac{\epsilon_0}{d} (\epsilon - 1) V^2 + 2\rho d g h = 0$$

$$h = \frac{\epsilon_0 (1 - \epsilon) V^2}{2\rho g d^2} \quad (\text{nilai 3})$$