SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2007
TINGKAT PROVINSI TAHUN 2006

Prestasi itu diraih bukan didapat !!!

SOLUSI SOAL

Bidang Matematika

Bagian Kedua

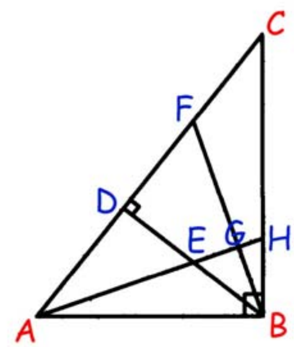
Disusun oleh : Eddy Hermanto, ST

BAGIAN KEDUA

1. Misalkan $\angle$GAF = α dan $\angle$GFA = γ

$\tan A = \frac{BD}{AD}$ sedangkan $\tan\alpha = \frac{DE}{AD} = \frac{BD}{2AD} = \frac{\tan A}{2}$ .... (1)

$\tan C = \frac{BD}{CD}$ sedangkan $\tan\gamma = \frac{BD}{FD} = \frac{2BD}{CD} = 2\tan C$ .... (2)



A + C = 90° → tan A = tan (90° − C) = ctg C → tan A tan C = 1

tan α · tan γ = tan A · tan C = 1

$$\tan(\alpha+\gamma) = \frac{\tan\alpha + \tan\gamma}{1 - \tan\alpha\tan\gamma}$$

Karena tan α · tan γ = 1 maka α + γ = 90°

Pada ΔAGF berlaku $\angle$AGF = 180° − (α + γ) = 90°

Karena $\angle$AGF = 90° maka AG tegak lurus FG

∴ Terbukti bahwa AE ⊥ BF

2. Dibuat subhimpunan {1, 2005}, {2, 2004}, {3, 2003}, ···, {1002, 1004}, {1003}

Jika diambil satu bilangan dari masing-masing subhimpunan tersebut maka terdapat 1003 bilangan yang tidak ada sepasang di antaranya yang berjumlah 2006.

Jika ditambahkan satu bilangan lagi selain 1003 bilangan tersebut maka dapat dipastikan terdapat sepasang bilangan yang berjumlah 2006.

∴ Banyaknya anggota S harus dipilih agar selalu terdapat paling sedikit satu pasang anggota terpilih yang hasil tambahnya 2006 adalah **1004.**

3. d = FPB(7n + 5, 5n + 4)

a. Maka d | 7n + 5 dan d | 5n + 4

Karena d membagi 7n + 5 maka d juga membagi 5(7n + 5)

Karena d membagi 5n + 4 maka d juga membagi 7(5n + 4)

Akibatnya d juga membagi 7(5n + 4) − 5(7n + 5) = 3

Karena d | 3 maka d = 1 atau 3 (terbukti)

b. Sebuah bilangan akan termasuk ke dalam salah satu bentuk dari 3k, 3k + 1 atau 3k + 2

Jika n = 3k maka 7n + 5 = 21k + 5 ≡ 2 (mod 3) dan 5n + 4 = 15k + 4 ≡ 1 (mod 3)

Jika n = 3k + 1 maka 7n + 5 = 21k + 12 ≡ 0 (mod 3) dan 5n + 4 = 15k + 9 ≡ 0 (mod 3)

Jika n = 3k + 2 maka 7n + 5 = 21k + 19 ≡ 1 (mod 3) dan 5n + 4 = 15k + 14 ≡ 2 (mod 3)

∴ Terbukti bahwa hanya bentuk n = 3k + 1 yang menyebabkan kedua bilangan 7n + 5 dan 5n + 4 habis dibagi 3 untuk n bilangan asli.

4. Agar Win akan mengulangi prosedur pelemparan koin lebih dari tiga kali maka pada lemparan yang ketiga masih terdapat sedikitnya satu koin yang muncul dengan sisinya bukan angka.

Pada lemparan pertama agar hal tersebut terjadi maka sisi koin yang muncul haruslah terdapat tepat satu sisi angka dan satu sisi bukan angka atau kedua sisi bukan angka.

- Jika pada lemparan pertama yang muncul adalah satu sisi angka dan satu bukan angka
  Peluang tersebut adalah ½.

Pada lemparan kedua dan ketiga sisi satu-satunya koin yang ia lempar tersebut harus bukan angka.
Peluang pada masing-masing kejadian adalah $\frac{1}{2}$.

Peluang Win akan mengulangai prosedur lebih dari tiga kali adalah $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

- Jika pada lemparan pertama kedua koin muncul dengan sisi bukan angka
  Peluang kejadian tersebut adalah $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$
  Agar Win akan mengulangi prosedur maka pada lemparan kedua sisi koin yang muncul haruslah terdapat tepat satu sisi angka dan satu sisi bukan angka atau kedua sisi bukan angka.
  - Jika pada lemparan kedua yang muncul adalah satu sisi angka dan satu bukan angka
    Peluang tersebut adalah $\frac{1}{2}$.
    Pada lemparan ketiga sisi satu-satunya koin yang ia lempar tersebut harus bukan angka.
    Peluang kejadian tersebut adalah $\frac{1}{2}$.

    Peluang Win akan mengulangi prosedur lebih dari tiga kali adalah $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$
  - Jika pada lemparan kedua, kedua koin muncul dengan sisi bukan angka
    Peluang kejadian tersebut adalah $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

Agar Win akan mengulangai prosedur maka pada lemparan ketiga sisi koin yang muncul haruslah terdapat tepat satu sisi angka dan satu sisi bukan angka atau kedua sisi bukan angka. Peluang kejadian ini adalah $\frac{3}{4}$.

Peluang Win akan mengulangi prosedur lebih dari tiga kali adalah $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{64}$

$\therefore$ Maka peluang Win akan mengulangi prosedur tersebut lebih dari 3 kali adalah $\frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{3}{64} = \frac{15}{64}$

5. $x^2 - 2ax + b = 0$ .... (1)
$x^2 - 2bx + c = 0$ .... (2)
$x^2 - 2cx + a = 0$ .... (3)
Karena akar-akar persamaan kuadrat di atas adalah bilangan asli maka diskriminannya harus merupakan kuadrat sempurna.
Dari pers (1) $\rightarrow$ $4a^2 - 4b$ merupakan kuadrat sempurna
$a^2 - b$ juga kuadrat sempurna .... (4)
Dengan cara yang sama untuk persmaan (2) dan (3) didapat :
$b^2 - c$ juga kuadrat sempurna .... (5)
$c^2 - a$ juga kuadrat sempurna .... (6)
Pada persamaan (4) karena b bilangan asli maka $a^2 - b < a^2$ atau $a^2 - b \le (a - 1)^2$
$-b \le -2a + 1$ $\rightarrow$ $b \ge 2a - 1$ .... (7)
Dengan cara yang sama untuk persamaan (5) dan (6) didapat :
$c \ge 2b - 1$ .... (8)
$a \ge 2c - 1$ .... (9)
Maka :
$a \ge 2c - 1 \ge 2(2b - 1) - 1 \ge 2(2(2a - 1) - 1) - 1$ $\rightarrow$ $a \ge 8a - 7$ $\rightarrow$ $a \le 1$ maka $a = 1$
Dari persamaan (9) didapat $1 \ge 2c - 1$ $\rightarrow$ $c \le 1$ $\rightarrow$ $c = 1$
Dari persamaan (8) didapat $1 \ge 2b - 1$ $\rightarrow$ $b \le 1$ $\rightarrow$ $b = 1$
$\therefore$ a, b dan c yang memenuhi persamaan tersebut hanya **a = b = c = 1**