SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2007
TINGKAT PROVINSI TAHUN 2006

Prestasi itu diraih bukan didapat !!!

SOLUSI SOAL

Bidang Matematika

Bagian Pertama

Disusun oleh : Eddy Hermanto, ST

BAGIAN PERTAMA

1. $12^3 = 1728$; $13^3 = 2197$; $44^2 = 1936$; $45^2 = 2025$

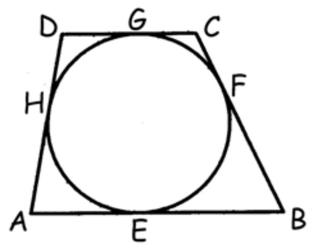
   $\sqrt[3]{2006} < m < \sqrt{2006}$ dapat disederhanakan menjadi $13 \le m \le 44$ untuk m bulat

   Himpunan m yang memenuhi = {13, 14, 15, ···, 44}

   13 + 14 + 15 + ··· + 44 = 912

   ∴ Penjumlahan semua bilangan yang memenuhi sama dengan **912.**

2. Jika titik P di luar lingkaran dan menyinggung lingkaran tersebut di titik Q dan R maka PQ = PR

   Dari gambar di atas didapat DG = DH ; CG = CF ; BF = BE ; AE = AH

   Keliling = AE + AH + BE + BF + CF + CG + DG + DH = 2 (DG + CG + AE + BE)

   Keliling = 2(DC + AB) = 2(40 + 75)

   ∴ Keliling trapesium = **230**

3. $(x-1)^3 + (x-2)^2 = 1$

   $(x-1)^3 = 1 - (x-2)^2 = (1-(x-2))(1+(x-2)) = (3-x)(x-1)$

   $(x-1)((x-1)^2 - (3-x)) = 0$

   $(x-1)(x^2 - x - 2) = 0$

   $(x-1)(x+1)(x-2) = 0$

   ∴ Himpunan semua nilai x yang memenuhi adalah **{−1, 1, 2}**

4. Misalkan a, b dan c adalah ketiga bilangan prima tersebut dengan a = b + c

   Bilangan prima genap hanya ada satu yaitu 2.

   Karena a > 2 maka a pasti ganjil yang menyebabkan paritas b dan c harus berbeda.

   Tanpa mengurangi keumuman misalkan $c \le b$ maka c = 2

   a = b + 2 → a − b = 2

   Karena a − b = 2 maka terdapat tepat 1 bilangan asli di antara a dan b. Misalkan bilangan tersebut adalah k. Maka b, k dan a adalah 3 bilangan asli berurutan. Salah satunya harus habis dibagi 3. Karena b dan a bilangan prima lebih dari 3 maka k habis dibagi 3. Karena k juga genap maka k habis dibagi 6.

   Jika k = 16 · 6 = 96 maka b = 95 bukan prima. Jika k = 15 · 6 = 90 maka a = 91 bukan prima. Jika k = 14 · 6 = 84 maka a = 85 bukan prima. Jika k = 13 · 6 = 78 maka b = 77 bukan prima. Jika k = 12 · 6 = 72 maka a = 73 dan b = 71 yang memenuhi keduanya prima

   ∴ Bilangan prima dua angka terbesar yang memenuhi adalah **73.**

5. $S_\infty = \dfrac{a}{1-r}$

Misalkan bilangan pertama yang dipilih Afkar adalah $(\frac{1}{2})^a$ untuk a bilangan bulat tak negatif dan rasio, $r = (\frac{1}{2})^b$ untuk b bilangan asli maka :

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^a}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^b} = \frac{1}{7}$$

Karena b asli maka $\frac{1}{2} \le 1 - (\frac{1}{2})^b < 1$

$$\frac{1}{14} \le \left(\frac{1}{2}\right)^a < \frac{1}{7}$$

Nilai a yang memenuhi hanya a = 3 $\rightarrow$ b = 3

Maka 3 suku pertama yang dipilih Afkar adalah $(\frac{1}{2})^3$, $(\frac{1}{2})^6$ dan $(\frac{1}{2})^9$

$\therefore$ Tiga suku pertama yang dipilih Afkar adalah $\frac{1}{8}, \frac{1}{64}, \frac{1}{512}$.

6. Misalkan panjang sisi-sisi balok tersebut adalah a, b dan c.

Tanpa mengurangi keumuman soal misalkan $ab = 486 = 2 \cdot 3^5$; $ac = 243 = 3^5$; $bc = 162 = 2 \cdot 3^4$

$(ab)(ac)(bc) = (abc)^2 = 2^2 \cdot 3^{14}$

$abc = 2 \cdot 3^7 = 4374$

$\therefore$ Volume balok = 4374

7. $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-4x+3}$ $\rightarrow$ $f(x) = 3^{-x^2+4x-3}$

Agar f(x) maksimum maka $y = -x^2 + 4x - 3$ harus maksimum

$y = -x^2 + 4x - 3 = -(x-2)^2 + 1$

y maksimum = 1 saat x = 2

$f(x)_{maksimum} = 3$

$\therefore$ $f(x)_{maksimum} = 3$

8. $f(x) = ||x-2| - a| - 3$

f memotong sumbu x maka $||x-2| - a| - 3 = 0$

$||x-2| - a| = 3$

$|x-2| - a = 3$ atau $|x-2| - a = -3$

$|x-2| = a + 3$ atau $|x-2| = a - 3$

Jika $a + 3 = 0$ maka $|x-2| = 0$ hanya ada 1 penyelesaian. Sebaliknya jika $a + 3 \ne 0$ maka penyelesaian $|x-2| = a + 3$ ada 2 penyelesaian yaitu $x - 2 = a + 3$ atau $x - 2 = -(a+3)$

Hal yang sama untuk persamaan $|x-2| = a - 3$

Maka jika $a = -3$ akan menyebabkan hanya ada 1 penyelesaian x untuk persamaan $|x-2| = a + 3$ namun ada dua nilai x untuk penyelesaian $|x-2| = a - 3$

Sedangkan jika a = 3 akan menyebabkan hanya ada 1 penyelesaian x untuk persamaan $|x - 2| = a - 3$ namun ada dua nilai x untuk penyelesaian $|x - 2| = a + 3$

∴ Nilai a yang menyebabkan grafik f memotong sumbu x tepat di tiga titik adalah **a = 3 atau a = −3.**

9. $s(n) = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n + 1)$

   $p(n) = 1 \times 2 \times \cdots \times n$

   Karena n genap maka $\frac{1}{2}n$ bilangan bulat.

   Karena n + 1 > 1 ; n + 1 > 2 ; ⋯ ; n + 1 > n maka agar p(n) habis dibagi s(n) maka n + 1 tidak boleh prima.

   Bilangan genap terkecil yang menyebabkan n + 1 bukan prima adalah 8.

   ∴ Bilangan genap terkecil yang memenuhi p(n) habis dibagi s(n) adalah **8.**

10. $|x| + x + y = 10$ dan $x + |y| - y = 12$

   * Jika x dan y di kuadran I maka $|x| = x$ dan $|y| = y$

     $2x + y = 10$ dan $x = 12$ → $y = -14$ (tidak memenuhi (x, y) di kuadran I)

   * Jika x dan y di kuadran II maka $|x| = -x$ dan $|y| = y$

     $y = 10$ dan $x = 12$ (tidak memenuhi (x, y) di kuadran II)

   * Jika x dan y di kuadran III maka $|x| = -x$ dan $|y| = -y$

     $y = 10$ dan $x - 2y = 12$ → $x = 32$ (tidak memenuhi (x, y) di kuadran III)

   * Jika x dan y di kuadran IV maka $|x| = x$ dan $|y| = -y$

     $2x + y = 10$ dan $x - 2y = 12$

     Nilai (x, y) yang memenuhi adalah (32/5, −14/5) (memenuhi (x, y) di kuadran IV)

   $x + y = \frac{32}{5} - \frac{14}{5}$

   ∴ $x + y = \frac{18}{5}$

11. Jika a, b dan c adalah himpunan aritmatika maka 2b = a + c dengan a < c.

   - Jika b = 2 maka a + c = 4. Ada 1 pasangan (a, c) yang memenuhi yaitu (1, 3)
   - Jika b = 3 maka a + c = 6. Ada 2 pasangan (a, c) yang memenuhi yaitu (1, 5), (2, 4)
   - Jika b = 4 maka a + c = 8. Ada 3 pasangan (a, c) yang memenuhi yaitu (1, 7), (2, 6), (3, 5)
   - Jika b = 5 maka a + c = 10. Ada 3 pasangan (a, c) yang memenuhi yaitu (2, 8), (3, 7), (4, 6)
   - Jika b = 6 maka a + c = 12. Ada 2 pasangan (a, c) yang memenuhi yaitu (4, 8), (5, 7)
   - Jika b = 7 maka a + c = 14. Ada 1 pasangan (a, c) yang memenuhi yaitu (6, 8)

   ∴ Banyaknya himpunan aritmatika = 1 + 2 + 3 + 3 + 2 + 1 = **12**

12. $(a + 2) + (a + 1) + a = 3(a + 1)$

   Maka semua bilangan yang berbentuk $N = \overline{(a+2)(a+1)a}$ habis dibagi 3 sebab penjumlahan digitnya habis dibagi 3.

   $321 = 3 \cdot 107$ dengan 3 dan 107 adalah bilangan prima.

   Tetapi 432/107 bukan bilangan bulat atau 107 tidak membagi 432.

   FPB (321, 432) = 3

   ∴ Maka kesepuluh bilangan N semacam itu memiliki faktor persekutuan terbesar = **3**

13. $x^2 + \frac{1}{x^2} = 47$ → $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = 47$ → $x + \frac{1}{x} = 7$

$\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 - 2 = 7$

∴ $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = 3$

14. Misalkan jumlah murid laki-laki = m dan jumlah murid perempuan = n

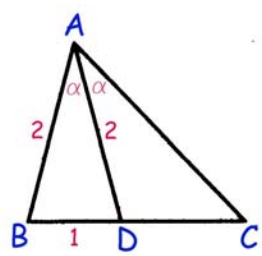
(m : (m + n)) : (n : (m + n)) = 2 : 3

m : n = 2 : 3 → 3m = 2n

$\frac{m}{m+n} = \frac{2m}{2m+3m} = \frac{2}{5}$

∴ Persentase murid laki-laki di kelas tersebut adalah 40 %

15.



Karena α < 45 maka AC > AD → AC > 2

Karena AD adalah garis bagi ΔABC maka berlaku $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$ → AC = 2 CD

Misalkan panjang CD = x maka AC = 2x

Pada ΔABD berlaku $\cos\alpha = \frac{2^2 + 2^2 - 1^2}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{7}{8}$

Pada ΔABC berlaku $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = \frac{(2x)^2 + 2^2 - (1+x)^2}{2 \cdot (2x) \cdot 2}$

$\frac{34}{64} = \frac{4x^2 + 4 - (1 + 2x + x^2)}{8x}$

$17x = 12x^2 - 8x + 12$

$(4x - 3)(3x - 4) = 0$

Karena AC > 2 maka x > 1

Nilai x yang memenuhi hanya x = $\frac{4}{3}$

∴ CD = $\frac{4}{3}$

16. $ax^4 + bx^3 + 1 = q(x) \cdot (x - 1)^2$

Jelas bahwa q(x) harus merupakan fungsi kuadrat.

Karena koefisien x^4 adalah a dan konstanta ruas kiri = 1 maka $q(x) = ax^2 + px + 1$

$ax^4 + bx^3 + 1 = (ax^2 + px + 1) \cdot (x^2 - 2x + 1)$

$ax^4 + bx^3 + 1 = ax^4 + (-2a + p)x^3 + (a - 2p + 1)x^2 + (p - 2)x + 1$

Dari persamaan di atas didapat :

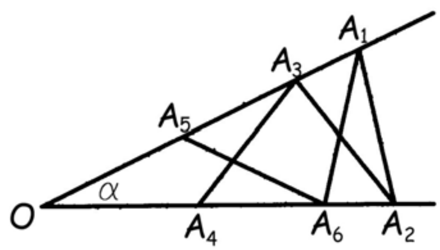
Berdasarkan koefisien x maka $p - 2 = 0 \rightarrow p = 2$

Berdasarkan koefisien x^2 maka $a - 2p + 1 = 0 \rightarrow a = 3$

Berdasarkan koefisien x^3 maka $b = -2a + p \rightarrow b = -4$

$\therefore$ ab = **−12**

17.



Karena $A_4O = A_3A_4$ maka ΔOA_4A_3 sama kaki $\rightarrow \angle OA_3A_4 = \alpha$ dan $\angle A_3A_4A_6 = 2\alpha$

Pada $\Delta A_4A_3A_2$ sama kaki berlaku $\angle A_3A_2A_4 = 2\alpha \rightarrow \angle A_4A_3A_2 = 180^o - 4\alpha \rightarrow \angle A_2A_3A_1 = 3\alpha$

Pada $\Delta A_1A_2A_3$ sama kaki berlaku $\angle A_2A_1A_3 = 3\alpha \rightarrow \angle A_1A_2A_3 = 180^o - 6\alpha$

$\angle A_1A_2A_6 = \angle A_3A_2A_4 + \angle A_1A_2A_3 = 180^o - 4\alpha$

Pada $\Delta A_1A_2A_6$ sama kaki berlaku $\angle A_1A_6A_2 = \angle A_1A_2A_6 = 180^o - 4\alpha \rightarrow \angle A_6A_1A_2 = 8\alpha - 180^o$

$\angle A_5A_1A_6 = \angle A_2A_1A_3 - \angle A_6A_1A_2 = 3\alpha - (8\alpha - 180^o) = 180^o - 5\alpha$

Pada $\Delta A_1A_6A_5$ sama kaki berlaku $\angle A_6A_5A_1 = \angle A_5A_1A_6 = 180^o - 5\alpha \rightarrow \angle A_6A_5O = 5\alpha$

Pada ΔOA_5A_6 sama kaki berlaku $\angle OA_6A_5 = \angle A_5OA_6 = \alpha$

Pada ΔOA_5A_6 berlaku $\angle A_5OA_6 + \angle OA_5A_6 + \angle OA_6A_5 = 180^o$

$\alpha + 5\alpha + \alpha = 180^o$

$\therefore \quad \alpha = \frac{180°}{7}$

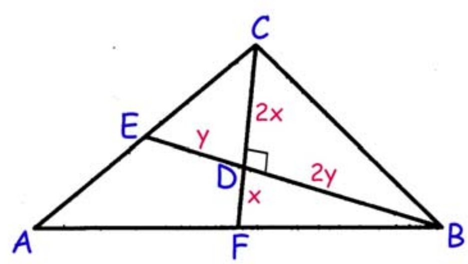
18. Banyaknya susunan 7 angka dengan 3 buah angka 2 yang sama dan 2 buah angka 4 yang sama adalah $\frac{7!}{3! \cdot 2!}$ = 420. Tetapi 420 bilangan tersebut termasuk bilangan dengan angka 0 pada angka pertama.

Banyaknya bilangan dengan 0 pada angka pertama adalah $\frac{6!}{3! \cdot 2!}$ = 60

$\therefore$ Banyaknya bilangan yang dapat dibentuk adalah 420 − 60 = **360**.

19. $a_{k+1} - a_k = 2(a_k - a_{k-1}) - 1$
Misalkan $a_2 - a_1 = 2 = u_1$
$a_3 - a_2 = 2(a_2 - a_1) - 1 = 2u_1 - 1 = u_2$
$a_4 - a_3 = 2(a_3 - a_2) - 1 = 2u_2 - 1 = u_3$
$\vdots$
$a_{k+1} - a_k = 2(a_k - a_{k-1}) - 1 = 2u_{k-1} - 1 = u_k$
Jumlahkan seluruh persamaan di atas didapat :
$a_{k+1} - a_1 = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_k$
Karena a_1, a_2, a_3, ⋯ semuanya asli maka $a_{k+1} > u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_k$
Misalkan $a_{k+1} = 2006$
Agar didapat $(a_1)_{minimal}$ maka $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_k$ harus paling dekat dengan 2006 namun kurang dari 2006
$u_1 = 2$; $u_2 = 3$; $u_3 = 5$; $u_4 = 9$; $u_5 = 17$; $u_6 = 33$; $u_7 = 65$; $u_8 = 129$; $u_9 = 257$; $u_{10} = 513$ dan $u_{11} = 1025$.
$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{10} = 1033$ sedangkan $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{11} = 2058 > 2006$
maka $2006 = a_{11}$
$a_{11} - a_1 = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{10} = 1033$
$(a_1)_{minimum} = 2006 - 1033$
$(a_1)_{minimum} = 973$

20.



CF dan BE adalah garis berat yang berpotongan di titik D. Maka CD : DF = 2 : 1 dan BD : DE = 2 : 1
Misalkan DF = x maka CD = 2x dan jika DE = y maka BD = 2y

tan B = tan (∠CBD + ∠FBD) = $\dfrac{\tan\angle CBD + \tan\angle FBD}{1 - \tan\angle CBD \cdot \tan\angle FBD}$

$$\tan B = \frac{\frac{2x}{2y} + \frac{x}{2y}}{1 - \frac{2x}{2y}\cdot\frac{x}{2y}} = \frac{3xy}{2y^2 - x^2} \quad \rightarrow \quad ctgB = \frac{2y}{3x} - \frac{x}{3y}$$

tan C = tan (∠BCD + ∠ECD) = $\dfrac{\tan\angle BCD + \tan\angle ECD}{1 - \tan\angle BCD \cdot \tan\angle ECD}$

$$\tan C = \frac{\frac{2y}{2x} + \frac{y}{2x}}{1 - \frac{2y}{2x}\cdot\frac{y}{2x}} = \frac{3xy}{2x^2 - y^2} \quad \rightarrow \quad ctgC = \frac{2x}{3y} - \frac{y}{3x}$$

$$ctgB + ctgC = \frac{x}{3y} + \frac{y}{3x}$$

Berdasarkan ketaksamaan AM-GM maka :

$$ctgB + ctgC \geq 2\sqrt{\frac{x}{3y} \cdot \frac{y}{3x}} = \frac{2}{3}$$

$\therefore$ Maka nilai minimum ctg B + ctg C adalah $\frac{2}{3}$