SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2006
TINGKAT PROVINSI TAHUN 2005

Prestasi itu diraih bukan didapat !!!

SOLUSI SOAL

Bidang Matematika

Bagian Pertama

Disusun oleh : Eddy Hermanto, ST

BAGIAN PERTAMA

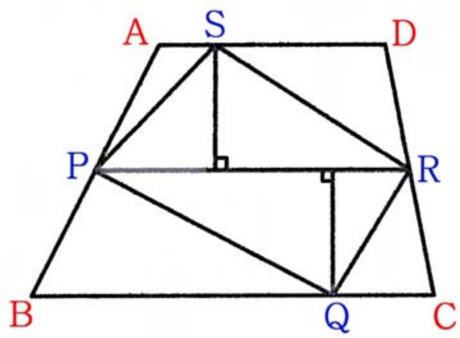
1. Bilangan rasional + bilangan tak rasional = bilangan tak rasional
   $\therefore$ a + b adalah bilangan **tak rasional.**

2. Sepuluh bilangan prima pertama adalah 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29.
   2 + 3 + 5 + 7 + 11 + 13 + 17 + 19 + 23 + 29 = 129
   $\therefore$ Jumlah sepuluh bilangan prima pertama = **129**

3. $\{1, 2\} \subseteq X \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$
   X terdiri dari sedikitnya 2 unsur dan maksimal 5 unsur dengan 2 unsur di antaranya haruslah 1 dan 2. Sedangkan sisanya dipilih dari unsur-unsur 3, 4 atau 5.
   Jika X terdiri dari 2 unsur maka banyaknya himpunan X = ${}_3C_0$ = 1
   Jika X terdiri dari 3 unsur maka banyaknya himpunan X = ${}_3C_1$ = 3
   Jika X terdiri dari 4 unsur maka banyaknya himpunan X = ${}_3C_2$ = 3
   Jika X terdiri dari 5 unsur maka banyaknya himpunan X = ${}_3C_3$ = 1
   $\therefore$ Banyaknya himpunan X = 1 + 3 + 3 + 1 = **8.**

4. N = 123456789101112 ⋯ 9899100
   Banyaknya angka 123456789 adalah 9.
   Karena 10, 11, ⋯, 99 adalah bilangan 2 angka maka banyaknya digit 101112⋯99 adalah genap.
   Banyaknya angka 100 = 3
   Maka banyaknya angka N adalah merupakan bilangan genap.
   Mengingat $350^2 = 122500$, $351^2 = 123201$, $352^2 = 123904$, $110^2 = 12100$, $111^2 = 12321$, $112^2 = 12544$ maka kemungkinan tiga angka pertama dari $\sqrt{N}$ adalah 351 atau 111.
   Akan dibuktikan bahwa jika tiga angka pertama $\sqrt{N}$ adalah 111 maka banyaknya digit N akan ganjil sedangkan jika tiga angka pertama $\sqrt{N}$ adalah 351 maka banyaknya digit N akan genap.
   $N = (111 \cdot 10^k + p)^2 = 12321 \cdot 10^{2k} + 222p \cdot 10^k + p^2$ dengan banyaknya angka $\lfloor p \rfloor$ tidak lebih dari k.
   Karena banyaknya angka $\lfloor p \rfloor$ tidak lebih dari k maka $p < 10^k$.
   $N < 12321 \cdot 10^{2k} + 222 \cdot 10^{2k} + 10^{2k} = 12544 \cdot 10^{2k}$
   $12321 \cdot 10^{2k} < N < 12544 \cdot 10^{2k}$
   Maka banyaknya angka N sama dengan banyaknya angka $12321 \cdot 10^{2k}$ yang merupakan bilangan ganjil.
   $N = (351 \cdot 10^k + p)^2 = 123201 \cdot 10^{2k} + 702p \cdot 10^k + p^2$ dengan banyaknya angka $\lfloor p \rfloor$ tidak lebih dari k.
   Karena banyaknya angka $\lfloor p \rfloor$ tidak lebih dari k maka $p < 10^k$.
   $N < 123201 \cdot 10^{2k} + 702 \cdot 10^{2k} + 10^{2k} = 123904 \cdot 10^{2k}$
   $123201 \cdot 10^{2k} < N < 123904 \cdot 10^{2k}$
   Maka banyaknya angka N sama dengan banyaknya angka $123201 \cdot 10^{2k}$ yang merupakan bilangan genap.
   $\therefore$ Tiga angka pertama $\sqrt{N}$ adalah **351.**

5. Misalkan [PQRS] menyatakan luas segiempat PQRS



Misalkan juga jarak antara garis AD dan BC adalah t

[ABCD] = $\frac{1}{2}$ (AD + BC) · t

Karena P dan R berurutan adalah pertengahan AB dan CD maka PR sejajar CD dan berlaku :

PR = $\frac{1}{2}$ (AD + BC)

Jarak titik Q ke PR = jarak titik S ke PR = $\frac{1}{2}$ t

[PQRS] = [PQR] + [PRS] = $\frac{1}{2}$ ($\frac{1}{2}$t)(PR) + $\frac{1}{2}$ ($\frac{1}{2}$t)(PR)

[PQRS] = ($\frac{1}{2}$t)(PR) = $\frac{1}{2}$ ($\frac{1}{2}$ (AD + BC) · t) = $\frac{1}{2}$ [ABCD]

∴ Rasio luas segiempat PQRS terhadap luas trapesium ABCD adalah **1 : 2**

6. Bilangan kuadrat yang juga merupakan bilangan pangkat tiga adalah bilangan pangkat enam.

$2^6 = 64$ dan $3^6 = 729$

∴ Bilangan tiga-angka terkecil yang merupakan bilangan kuadrat sempurna dan bilangan kubik (pangkat tiga) sempurna sekaligus adalah **729**.

7. $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{a}}{\sqrt{4}+\sqrt{b}} = \frac{p}{q}$ dengan a, b, p dan q asli dan a ≤ b serta p dan q keduanya relatif prima.

$\left(q\sqrt{3} - 2p\right)^2 = \left(p\sqrt{b} - q\sqrt{a}\right)^2$

$3q^2 + 4p^2 - 4pq\sqrt{3} = p^2b + q^2a - 2pq\sqrt{ab}$

Karena a, b, p, q semuanya asli maka $2\sqrt{3} = \sqrt{ab}$ → ab = 12.

Kemungkinan pasangan (a, b) yang memenuhi adalah (1, 12), (2, 6) dan (3, 4)

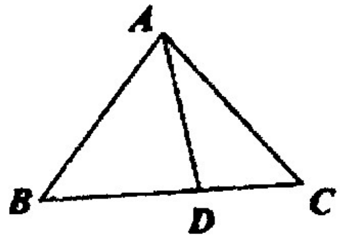
Jika a = 1 dan b = 12 maka $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{a}}{\sqrt{4}+\sqrt{b}} = \frac{1}{2}$ yang merupakan bilangan rasional.

Jika a = 2 dan b = 6 maka $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{a}}{\sqrt{4}+\sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ yang bukan merupakan bilangan rasional.

Jika a = 3 dan b = 4 maka $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{a}}{\sqrt{4}+\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ yang bukan merupakan bilangan rasional.

∴ Pasangan terurut (a, b) adalah **(1, 12)**

8.



Misalkan $\angle BAD = \alpha$
Karena AD = BD maka $\angle ABD = \alpha$
Karena AB = AC maka $\angle ACB = \alpha$
Pada ΔABC berlaku $(\alpha) + (\alpha + 39^o) + (\alpha) = 180^o \rightarrow \alpha = 47^o$
$\therefore$ Besarnya sudut BAD = **47°.**

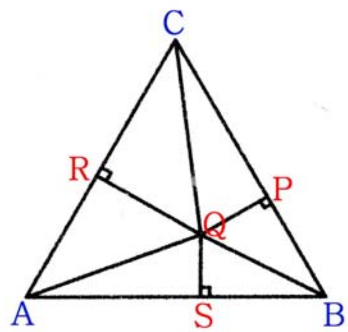
9. $v_n = 1\frac{1}{2}$ km/jam dan $v_t = 4\frac{1}{2}$ km/jam
Misalkan jarak antara kaki bukit dan puncak bukit dalam km adalah s.
$\frac{s}{1,5} + \frac{s}{4,5} = 6 \rightarrow s = \frac{27}{4}$ km
$\therefore$ Jarak antara kaki bukit dan puncak bukit = $\frac{27}{4}$ **km**

10. Karena keliling segienam beraturan sama dengan keliling segitiga sama sisi maka panjang sisi segitiga beraturan dua kali panjang sisi segienam beraturan.
Misalkan panjang sisi segienam beraturan = a maka panjang sisi segitiga sama sisi = 2a.
Luas segitiga sama sisi = $\frac{1}{2}(2a)^2 \sin 60^o = \sqrt{3} \rightarrow a = 1$
Pada segienam beraturan, jari-jari lingkaran luar segienam beraturan sama dengan panjang sisinya.
Luas segienam beraturan = $6 \cdot \frac{1}{2}(a^2) \sin 60^o$
$\therefore$ Luas segienam beraturan = $\frac{3}{2}\sqrt{3}$

11. Kemungkinan penjumlahan dua angka dadu bilangan prima adalah 2, 3, 5, 7, atau 11.
* Jika jumlah angka dadu = 2 maka banyaknya kemungkinan ada 1
* Jika jumlah angka dadu = 3 maka banyaknya kemungkinan ada 2
* Jika jumlah angka dadu = 5 maka banyaknya kemungkinan ada 4
* Jika jumlah angka dadu = 7 maka banyaknya kemungkinan ada 6
* Jika jumlah angka dadu = 11 maka banyaknya kemungkinan ada 2

Banyaknya kemungkinan seluruhnya = 1 + 2 + 4 + 6 + 2 = 15
$\therefore$ Peluang jumlah kedua angka dadu yang muncul adalah bilangan prima = $\frac{15}{36}$

12. Misalkan segitiga tersebut adalah segitiga ABC → AB + AC + BC = p → AB = AC = BC = $\frac{1}{3}p$



Luas ΔABC = $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}p\right)^2 \sin 60^\circ = \frac{1}{36}p^2\sqrt{3}$ dan QP + QR + QS = s

Luas ΔABC = Luas ΔABQ + Luas ΔACQ + Luas ΔBCQ = ½ AB QS + ½ AC QR + ½ BC QP

$\frac{1}{36}p^2\sqrt{3} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}p\right)(s)$

∴ $p = 2s\sqrt{3}$

13. ab + bc = 44 dan ac + bc = 23 dengan a, b, c asli dan a ≥ b ≥ c
Karena c(a + b) = 23 dengan a, b dan c asli maka c = 1 atau 23
Jika c = 23 maka a + b = 1 (tidak memenuhi sebab a + b ≥ 2). Maka c = 1
a + b = 23 dan ab + b = 44
(23 − b)b + b = 44 → $b^2 - 24b + 44 = 0$ → (b − 22)(b − 2) = 0
b = 2 atau b = 22
Jika b = 22 maka a = 1 (tidak memenuhi a ≥ b). Maka b = 2 → a = 21
∴ Barisan bilangan asli (a, b, c) yang memenuhi adalah **(21, 2, 1).**

14. Misal garis tersebut terletak pada sumbu X.
Angap titik A adalah titik paling kiri, D paling kanan serta B dan C terletak di antara A dan D dengan titik terdekat pada A adalah B.
Tanpa mengurangi keumuman misalkan titik A berada pada x = 0 dan D pada koordinat x = 10.
Karena ada yang berjarak 1 dan 9 maka salah satu B berada di x = 1 atau C pada x = 9

- Jika B terletak pada x = 1
  Jarak B dan D = 9
  Karena harus ada dua titik yang berjarak 4 maka kemungkinan posisi C ada di x = 4, 5 atau 6.
  Posisi C tidak mungkin di x = 4 sebab akan membuat jarak antara sebarang dua titik adalah 1, 3, 4, 6, 9, 10.
  Posisi C tidak mungkin di x = 5 sebab akan membuat jarak antara sebarang dua titik adalah 1, 4, 5, 9, 10 (tidak ada nilai k)
  Maka posisi C ada di x = 6 yang akan membuat jarak dua titik sebarang adalah 1, 4, 5, 6, 9, 10
  k = 6
- Jika C terletak pada x = 9
  Jarak C dan A = 9

Karena harus ada dua titik yang berjarak 4 maka kemungkinan posisi B ada di x = 4, 5 atau 6.
Posisi B tidak mungkin di x = 6 sebab akan membuat jarak antara sebarang dua titik adalah 1, 3, 4, 6, 9, 10.
Posisi B tidak mungkin di x = 5 sebab akan membuat jarak antara sebarang dua titik adalah 1, 4, 5, 9, 10 (tidak ada nilai k)
Maka posisi B ada di x = 4 yang akan membuat jarak dua titik sebarang adalah 1, 4, 5, 6, 9, 10
k = 6

∴ Maka k = **6**

15. Secara umum untuk kelompok terdiri dari n anggota. Orang ke-k akan menerima surat setelah sedikitnya terjadi k − 2 telepon. Maka orang terakhir akan menerima surat yang pertama sedikitnya setelah terjadi n − 2 kiriman surat. Setelah orang ke-n menerima surat berarti sedikitnya telah terjadi n − 1 kiriman surat. Semua informasi yang didapat oleh orang ke-n akan disebar kepada seluruh orang selain dirinya. Sedikitnya dibutuhkan n − 1 surat.
Maka banyaknya surat minimum yang diperlukan sehingga setiap orang akan mengetahui n informasi adalah 2(n − 1)

∴ Banyaknya surat yang diperlukan adalah **4008.**

16. $2xy - 5x + y = 55 \rightarrow (2x + 1)(2y - 5) = 105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$
Maka 2y − 5 membagi 105 → $2y - 5 = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 7, \pm 15, \pm 21, \pm 35, \pm 105$.
Karena 105 merupakan perkalian bilangan ganjil maka semua faktor 105 adalah bilangan ganjil.
Karena penjumlahan dua bilangan ganjil adalah bilangan genap yang pasti habis dibagi 2 maka berapa pun faktor positif dan faktor negatif dari 105 akan membuat 2x + 1 dan 2y − 5 keduanya membagi faktor dari 105 tersebut.
105 memiliki 8 faktor positif dan 8 faktor negatif.

∴ Maka banyaknya pasangan bilangan bulat (x, y) yang memenuhi adalah **16.**

17. Misalkan hasil perkalian semua unsur A = p dan penjumlahan semua unsur B = s → p = s
Himpunan A dapat terdiri dari 1 atau lebih unsur.
1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45

* Andaikan 1 adalah unsur terkecil B.
   - Jika A terdiri dari sedikitnya 4 unsur
     Karena 1 bukanlah unsur dari A maka $p \geq 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120 > 45$ (tidak dapat tercapai p = s)
   - Jika A terdiri dari 3 unsur
     Misalkan ketiga unsur A tersebut adalah a, b dan c. Jelas bahwa abc < 45
     Kemungkinan unsur-unsur A adalah (2, 3, 4), (2, 3, 5), (2, 3, 6), (2, 3, 7) dan (2, 4, 5)
     Jika unsur-unsur A adalah (2, 3, 4) → p = 24 dan s = 45 − 9 = 36 (tidak memenuhi p = s)
     Jika unsur-unsur A adalah (2, 3, 5) → p = 30 dan s = 45 − 10 = 35 (tidak memenuhi p = s)
     Jika unsur-unsur A adalah (2, 3, 6) → p = 36 dan s = 45 − 11 = 34 (tidak memenuhi p = s)
     Jika unsur-unsur A adalah (2, 3, 7) → p = 42 dan s = 45 − 12 = 33 (tidak memenuhi p = s)
     Jika unsur-unsur A adalah (2, 4, 5) → p = 40 dan s = 45 − 11 = 34 (tidak memenuhi p = s)
     Maka jika A terdiri dari 3 unsur maka tidak ada yang memenuhi p = s.
   - Jika A terdiri dari 2 unsur
     Misalkan kedua unsur A tersebut adalah a dan b dengan $1 \leq a, b \leq 9$.
     p = s → ab = 45 − a − b → (a + 1)(b + 1) = 46 = 23 · 2
     Misalkan a > b maka a + 1 = 23 dan b + 1 = 2 → a = 22 (tidak memenuhi $a \leq 9$)

- Jika A terdiri dari 1 unsur
  $p \le 9$ sedangkan $s \ge 45 - 9 = 36$ (tidak mungkin tercapai p = s)

* Andaikan 2 adalah unsur terkecil B
Jika A = {1, 4, 8} dan B = {2, 3, 5, 6, 7, 9} maka :
$p = 1 \cdot 4 \cdot 8 = 32$ dan $s = 45 - 1 - 4 - 8 = 32$ (terpenuhi p = s)

∴ Unsur terkecil dari B adalah **2**.

18. Misalkan $\frac{(2^3-1)(3^3-1)(4^3-1)}{(2^3+1)(3^3+1)(4^3+1)}\cdots\frac{(100^3-1)}{(100^3+1)} = X$

$$\frac{k^3-1}{k^3+1} = \frac{(k-1)(k^2+k+1)}{(k+1)(k^2-k+1)}$$

$$X = \frac{(2-1)(3-1)(4-1)}{(2+1)(3+1)(4+1)}\cdots\frac{(100-1)}{(100+1)}\frac{(2^2+2+1)(3^2+3+1)(4^2+4+1)}{(2^2-2+1)(3^2-3+1)(4^2-4+1)}\cdots\frac{(100^2+100+1)}{(100^2-100+1)}$$

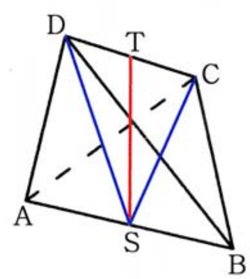
Perhatikan bahwa $n^2 + n + 1 = (n+1)^2 - (n+1) + 1$. Maka $2^2 + 2 + 1 = 3^2 - 3 + 1$; $3^2 + 3 + 1 = 4^2 - 4 + 1$ dan seterusnya.

$$X = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots 99}{3\cdot 4\cdot 5\cdot\cdots 101}\cdot\frac{100^2+100+1}{2^2-2+1}$$

$$X = \frac{2}{100\cdot 101}\cdot\frac{10101}{3}$$

$$\therefore \frac{(2^3-1)(3^3-1)(4^3-1)}{(2^3+1)(3^3+1)(4^3+1)}\cdots\frac{(100^3-1)}{(100^3+1)} = \frac{20202}{30300}$$

19.



Karena ΔABD sama sisi dan S pertengahan AB maka DS garis tinggi → DS = AD sin60° = $\frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Dengan cara yang sama CS = $\frac{1}{2}\sqrt{3}$. Maka ΔCDS sama kaki. Karena ΔCDS sama kaki dan T pertengahan CD maka ST tegak lurus DT.

$ST^2 = DS^2 - DT^2$

$$ST = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

∴ ST = $\frac{1}{2}\sqrt{2}$

20. $\lfloor x + \sqrt{3} \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor \sqrt{3} \rfloor$

$\lfloor x + \sqrt{3} \rfloor > x + \sqrt{3} - 1$

$\lfloor x \rfloor + \lfloor \sqrt{3} \rfloor > x + \sqrt{3} - 1$

Mengingat $\lfloor \sqrt{3} \rfloor = 1$ maka :

$x - \lfloor x \rfloor < 2 - \sqrt{3}$

Jika $x - \lfloor x \rfloor = 2 - \sqrt{3}$ maka $\lfloor x + \sqrt{3} \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor \sqrt{3} \rfloor$ akan menjadi $\lfloor x \rfloor + 2 = \lfloor x \rfloor + 1$ sehingga kesamaan tidak mungkin terjadi.

Jika $x - \lfloor x \rfloor$ kurang sedikit dari $2 - \sqrt{3}$ maka $\lfloor x + \sqrt{3} \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor \sqrt{3} \rfloor$ akan menjadi $\lfloor x \rfloor + 1 = \lfloor x \rfloor + 1$ sehingga kesamaan terjadi.

$\therefore$ Maka $x - \lfloor x \rfloor$ tidak akan lebih besar dari $2 - \sqrt{3}$.

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2006
TINGKAT PROVINSI TAHUN 2005

Prestasi itu diraih bukan didapat !!!

SOLUSI SOAL

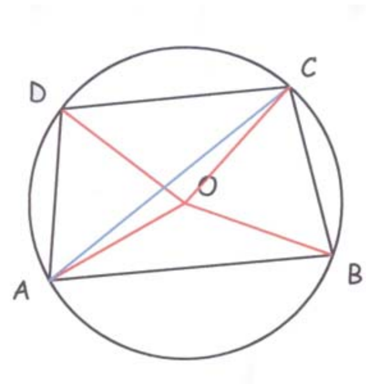
Bidang Matematika

Bagian Kedua

Disusun oleh : Eddy Hermanto, ST

BAGIAN KEDUA

1.



Misalkan ABCD adalah segiempat tali busur tersebut dan O adalah pusat lingkaran. Karena lingkaran tersebut juga merupakan lingkaran luar ΔABC maka sesuai dalil sinus :

$\frac{AB}{\sin \angle ACB} = 2R = 2$ dengan R menyatakan jari-jari lingkaran luar ΔABC

Karena ∠AOB = 2∠ACB maka :

AB = 2 sin $\left(\frac{\angle AOB}{2}\right)$

Dengan cara yang sama didapat :

BC = 2 sin $\left(\frac{\angle BOC}{2}\right)$

CD = 2 sin $\left(\frac{\angle COD}{2}\right)$

AD = 2 sin $\left(\frac{\angle AOD}{2}\right)$

$\angle AOB + \angle BOC + \angle COD + \angle AOD = 360^\circ$

Maka min(∠AOB, ∠BOC, ∠COD, ∠AOD) ≤ 90°

Diketahui bahwa a = maks (AB, BC, CD, AD)

Karena untuk $0^\circ \le x \le 90^\circ$ nilai sin x naik maka :

a = maks (AB, BC, CD, AD) ≥ 2 sin $\left(\frac{90^\circ}{2}\right)$

a ≥ $\sqrt{2}$

Maka nilai minimal a = $\sqrt{2}$

Karena maks(∠AOB, ∠BOC, ∠COD, ∠AOD) = min(∠AOB, ∠BOC, ∠COD, ∠AOD) = 90° maka :

∠AOB = ∠BOC = ∠COD = ∠AOD = 90° yang berarti AB = BC = CD = AD.

Karena ∠AOD = 90° sedangkan **Δ**AOD sama kaki maka ∠DOA = 45°. Dengan cara yang sama didapat ∠COD = 45° yang berarti segiempat ABCD adalah persegi.

∴ Maka nilai a terkecil adalah $\sqrt{2}$ yang membuat segiempat ABCD adalah persegi.

2. Kemungkinan empat jenis bola yang terambil adalah :
   - Keempat bola tersebut adalah (1, 3, 4, 4)

     Karena ada 4 obyek dan terdapat 2 yang sama maka banyaknya kemungkinan = $\frac{4!}{2!}$ = 12

     Semua kemungkinannya adalah (1, 3, 4, 4) ; (1, 4, 3, 4) ; (1, 4, 4, 3) ; (3, 1, 4, 4) ; (3, 4, 1, 4) ; (3, 4, 4, 1) ; (4, 1, 3, 4) ; (4, 1, 4, 3) ; (4, 3, 1, 4) ; (4, 3, 4, 1) ; (4, 4, 1, 3) ; (4, 4, 3, 1)
   - Keempat bola tersebut adalah (2, 3, 3, 4)

     Banyaknya kemungkinan = $\frac{4!}{2!}$ = 12

     Semua kemungkinannya adalah (2, 3, 3, 4) ; (2, 3, 4, 3) ; (2, 4, 3, 3) ; (3, 2, 3, 4) ; (3, 2, 4, 3) ; (3, 3, 2, 4) ; (3, 3, 4, 2) ; (3, 4, 2, 3) ; (3, 4, 3, 2) ; (4, 2, 3, 3) ; (4, 3, 2, 3) ; (4, 3, 3, 2)
   - Keempat bola tersebut adalah (2, 2, 4, 4)

     Banyaknya kemungkinan = $\frac{4!}{2!\cdot 2!}$ = 6

     Semua kemungkinannya adalah (2, 2, 4, 4) ; (2, 4, 2, 4) ; (2, 4, 4, 2) ; (4, 2, 2, 4) ; (4, 2, 4, 2) ; (4, 4, 2, 2)
   - Keempat bola tersebut adalah (3, 3, 3, 3)

     Banyaknya kemungkinan = $\frac{4!}{4!}$ = 1

     Semua kemungkinannya adalah (3, 3, 3, 3)

   Total banyaknya kemungkinan adalah 12 + 12 + 6 + 1 = 31

   Hanya ada satu cara kemungkinan angka yang muncul selalu 3.

   $\therefore$ Peluang bola yang terambil selalu bernomor 3 adalah = $\frac{1}{31}$

3. Dari $x^3 - x - 1 = 0$ serta $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$ didapat A = 1, B = 0, C = –1 dan D = –1

   $\alpha + \beta + \gamma = -\frac{B}{A} = 0$

   $\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = \frac{C}{A} = \frac{-1}{1} = -1$

   $\alpha\beta\gamma = -\frac{D}{A} = -\frac{(-1)}{1} = 1$

   $$\frac{1+\alpha}{1-\alpha} + \frac{1+\beta}{1-\beta} + \frac{1+\gamma}{1-\gamma} = \frac{(1+\alpha)(1-\beta)(1-\gamma) + (1+\beta)(1-\alpha)(1-\gamma) + (1+\gamma)(1-\alpha)(1-\gamma)}{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)}$$

   $$= \frac{3 - (\alpha+\beta+\gamma) - (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma) + 3\alpha\beta\gamma}{1 - (\alpha+\beta+\gamma) + (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma) - \alpha\beta\gamma}$$

   $$= \frac{3 - (0) - (-1) + 3(1)}{1 - (0) + (-1) - (1)}$$

   $$= -7$$

   $\therefore$ $\frac{1+\alpha}{1-\alpha} + \frac{1+\beta}{1-\beta} + \frac{1+\gamma}{1-\gamma} = -7$

4. $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ .... (1)

Luas ΔABC = ½ab = a + b + c → ab = 2(a + b + c) .... (2)

Karena a, b dan c adalah bilangan bulat maka sekurang-kurangnya salah satu di antara a atau b adalah kelipatan 2. Misal a = 2k dengan k ∈ bilangan asli maka :

$2k\sqrt{c^2 - 4k^2} = 2(2k + \sqrt{c^2 - 4k^2} + c)$

$k\sqrt{c^2 - 4k^2} = (2k + \sqrt{c^2 - 4k^2} + c)$

$(k-1)\sqrt{c^2 - 4k^2} = c + 2k$

$(k-1)^2(c+2k)(c-2k) = (c+2k)^2$

$(k-1)^2(c-2k) = (c+2k)$

$(k-1)^2(c-2k) = c - 2k + 4k$

$(c-2k)(k^2 - 2k) = 4k$

Karena k ≠ 0 maka $(c-2k)(k-2) = 4$ .... (3)

Karena c, k ∈ bilangan asli maka (k − 2) pasti membagi 4 dan karena c > 2k maka (k − 2) > 0

Nilai k yang memenuhi adalah 3; 4; 6

Untuk k = 3 maka a = 6 → c = 10 → b = 8 .... (4)

Untuk k = 4 maka a = 8 → c = 10 → b = 6 .... (5)

Untuk k = 6 maka a = 12 → c = 13 → b = 5 .... (6)

Jika diambil b = 2k maka didapat b = 12, a = 5 dan c = 13.

∴ **Maka tripel (a, b, c) yang memenuhi adalah (6, 8, 10) dan (5, 12, 13)**

5. Karena A dan B masing-masing beranggotakan bilangan asli berurutan sedangkan A ∩ B = {2005} maka 2005 adalah anggota terbesar dari A dan anggota terkecil dari B.

A = {x, x + 1, x + 2, ⋯, 2005) dan B = {2005, 2006, ⋯, y − 1, y}

A ∪ B = {x, x + 1, ⋯, y − 1, y}

Maka unsur yang terbesar dari A ∪ B adalah y.

$$\frac{x + x + 1 + \cdots + 2005}{2006 - x} + \frac{2005 + 2006 + \cdots + y}{y - 2004} = 5002$$

$$\frac{x + 2005}{2} + \frac{2005 + y}{2} = 5002$$

x + y + 4010 = 10004

x + y = 5994

Karena x bilangan asli maka x terkecil = 1 sehingga maksimum y = 5994 − 1 = 5993.

∴ **Unsur terbesar yang mungkin dari A ∪ B adalah 5993.**