# SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2005

# TINGKAT PROVINSI TAHUN 2004

*Prestasi itu diraih bukan didapat !!!*

## SOLUSI SOAL

Bidang Matematika

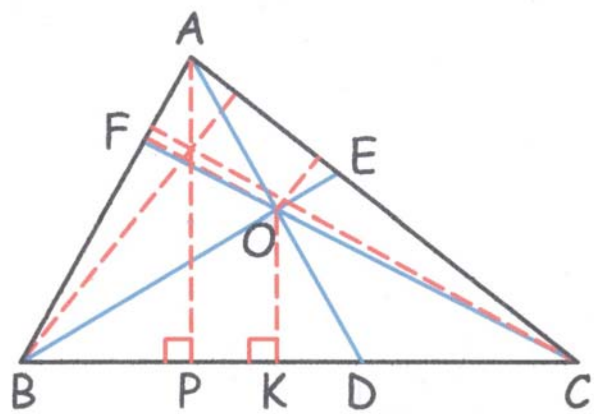
**Bagian Kedua**

Disusun oleh : Eddy Hermanto, ST

BAGIAN KEDUA

1. $x^2 + 4 = y^3 + 4x - z^3$ ........... (1)
   $y^2 + 4 = z^3 + 4y - x^3$ ........... (2)
   $z^2 + 4 = x^3 + 4z - y^3$ ........... (3)
   (1) + (2) + (3) → $x^2 + 4 + y^2 + 4 + z^2 + 4 = 4x + 4y + 4z$
   $(x^2 - 4x + 4) + (y^2 - 4y + 4) + (z^2 - 4z + 4) = 0$
   $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 + (z - 2)^2 = 0$
   Karena persamaan kuadrat tidak mungkin negatif, maka persamaan di atas hanya dipenuhi jika :
   $x - 2 = 0$ ; $y - 2 = 0$ dan $z - 2 = 0$
   Didapat $x = 2$ ; $y = 2$ dan $z = 2$. Subtitusikan hasil ini ke persamaan (1), (2) dan (3)
   Persamaan (1) → $(2)^2 + 4 = (2)^3 + 4(2) - (2)^3$ → $8 = 8$ (memenuhi)
   Persamaan (2) → $(2)^2 + 4 = (2)^3 + 4(2) - (2)^3$ → $8 = 8$ (memenuhi)
   Persamaan (3) → $(2)^2 + 4 = (2)^3 + 4(2) - (2)^3$ → $8 = 8$ (memenuhi)
   ∴ **(x, y, z) yang memenuhi adalah (2, 2, 2)**

2. Dibuat garis tinggi pada segitiga ABC dan segitiga BOC yang masing-masing ditarik dari titik A dan O. Garis tinggi ini masing-masing memotong sisi BC di titik P dan K.




Luas ΔABC = $\frac{1}{2}$(BC)(AP)

Luas ΔBOC = $\frac{1}{2}$(BC)(OK)

$\frac{Luas\Delta BOC}{Luas\Delta ABC} = \frac{OK}{AP}$ ......... (1)

ΔDAP sebangun dengan ΔDOK sehingga $\frac{OD}{AD} = \frac{OK}{AP}$ .............. (2)

Dari (1) dan (2) didapat $\frac{Luas\Delta BOC}{Luas\Delta ABC} = \frac{OD}{AD}$ ......................... (3)

Dengan cara yang sama didapat $\frac{Luas\Delta AOC}{Luas\Delta ABC} = \frac{OE}{BE}$ .... (4) dan $\frac{Luas\Delta AOB}{Luas\Delta ABC} = \frac{OF}{CF}$ ..... (5)

Luas ΔBOC + Luas ΔAOC + Luas ΔAOB = Luas ΔABC

$$\frac{Luas\Delta BOC}{Luas\Delta ABC} + \frac{Luas\Delta AOC}{Luas\Delta ABC} + \frac{Luas\Delta AOB}{Luas\Delta ABC} = 1$$

$$\frac{OD}{AD} + \frac{OE}{BE} + \frac{OF}{CF} = 1$$

$$1 - \frac{OA}{AD} + 1 - \frac{OB}{BE} + 1 - \frac{OC}{CF} = 1 \rightarrow \frac{OA}{AD} + \frac{OB}{BE} + \frac{OC}{CF} = 2$$

∴ Terbukti bahwa $\frac{OA}{AD} + \frac{OB}{BE} + \frac{OC}{CF} = 2$

3. Misal jarak dari rumah mereka ke sekolah = S

Untuk Doni :

Misalkan agar waktu yang diperlukan Doni adalah $2\frac{3}{4}$ menit maka ia harus naik sepeda sejauh X dan sisanya dengan jalan kaki dengan catatan bahwa Doni tidak pernah istirahat atau bergerak mundur.

Maka : $\frac{X}{S} + \frac{(S-X)8}{S} = \frac{11}{4}$ → 4X + 32S − 32X = 11S → X = $\frac{3}{4}$S

Untuk Coki :

Misalkan agar waktu yang diperlukan Doni adalah $2\frac{3}{4}$ menit maka ia harus naik sepeda sejauh Y dan sisanya dengan jalan kaki dengan catatan bahwa Coki tidak pernah istirahat atau bergerak mundur.

Maka : $\frac{Y}{S} + \frac{(S-Y)4}{S} = \frac{11}{4}$ → 4Y + 16S − 16Y = 11S → Y = $\frac{5}{12}$S

Karena $\frac{3}{4}$S + $\frac{5}{12}$S = $1\frac{1}{6}$S maka berarti sepeda harus dimundurkan dalam perjalanannya.

*Alternatif 1:*

Doni naik sepeda sejauh $\frac{3}{4}$S lalu melanjutkan perjalan dengan jalan kaki. Maka ia akan sampai dalam waktu $\frac{3}{4}\cdot 1 + \frac{1}{4}\cdot 8 = 2\frac{3}{4}$ menit.

Beni akan sampai di tempat di mana sepeda ditinggalkan dalam waktu $1\frac{1}{2}$ menit. Agar Coki juga dapat sampai di sekolah dalam waktu $2\frac{3}{4}$ menit maka Beni harus memundurkan sepedanya menuju ke arah rumahnya. Anggap Beni memundurkan sepedanya sejauh X dari tempat di mana sepeda tersebut ditemukan olehnya.

*Alternatif 1a :*

Jika yang diinginkan adalah Beni yang mencapai sekolah dalam waktu $2\frac{3}{4}$ menit maka :

$\frac{3}{4}\cdot 2+\frac{X}{S}+\frac{(X+0{,}25S)}{S}\cdot 2=\frac{11}{4}$ → 4X + 8X + 2S = 5S → $X=\frac{1}{4}S$. Artinya posisi sepeda kini berada di tengah-tengah antara rumah dan sekolah. Waktu yang diperlukan sampai dengan sepeda sampai di tempat tersebut adalah $\left(1\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)$ menit = $1\frac{3}{4}$ menit. Waktu yang diperlukan Coki untuk mencapai pertengahan rumah dan sekolah adalah 2 menit > $1\frac{3}{4}$ menit. Artinya ketika ia mencapai tempat tersebut, sepeda telah berada di sana.

Waktu yang diperlukan Coki untuk mencapai sekolah adalah $2+\frac{1}{2}\cdot 1=2\frac{1}{2}<2\frac{3}{4}$ menit.

∴ **Waktu yang diperlukan oleh Beni = $2\frac{3}{4}$ menit ; Coki = $2\frac{1}{2}$ menit ; Doni = $2\frac{3}{4}$ menit.**

*Alternatif 1b :*

Jika yang diinginkan adalah Coki yang mencapai sekolah dalam waktu $2\frac{3}{4}$ menit maka sesuai dengan hitungan sebelumnya, sepeda harus ditaruh pada $\frac{5}{12}$S dihitung dari sekolah atau $\left(\frac{5}{12}-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{6}$S dihitung dari tempat dimana sepeda ditemukan oleh Beni.

Waktu yang diperlukan Beni untuk mencapai sekolah adalah $\frac{3}{4}\cdot 2+\frac{1}{6}\cdot 1+\frac{5}{12}\cdot 2=2\frac{1}{2}<2\frac{3}{4}$ menit.

∴ **Waktu yang diperlukan oleh Beni = $2\frac{1}{2}$ menit ; Coki = $2\frac{3}{4}$ menit ; Doni = $2\frac{3}{4}$ menit.**

*Alternatif 2 :*

Coki naik sepeda sejauh $\frac{1}{2}$S dan melanjutkan perjalannya dengan jalan kaki. Waktu yang diperlukan untuk mencapai sekolah adalah $\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot 4=2\frac{1}{2}<2\frac{3}{4}$ menit

Beni akan mencapai pertengahan jarak terlebih dulu. Agar Doni dapat mencapai sekolah dalam waktu $2\frac{3}{4}$ menit maka Beni harus memundurkan sepedanya sejauh $\frac{1}{4}$S. Waktu yang diperlukan agar sepeda sampai pada jarak $\frac{1}{4}$S dari rumah adalah $\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{4}\cdot 1=\frac{3}{4}$ menit. Waktu yang diperlukan Doni untuk mencapai jarak ini adalah $\frac{1}{4}\cdot 8=2$ menit > $\frac{3}{4}$ menit. Artinya sepeda telah berada di sana saat Doni mencapai tempat tersebut.

Waktu yang diperlukan Beni untuk mencapai sekolah adalah $\frac{1}{2}\cdot 2+\frac{1}{4}\cdot 1+\frac{3}{4}\cdot 2 = 2\frac{3}{4}$ menit.

$\therefore$ **Waktu yang diperlukan oleh Beni = $2\frac{3}{4}$ menit ; Coki = $2\frac{1}{2}$ menit ; Doni = $2\frac{3}{4}$ menit**

4. Anggap terdapat persamaan yang memenuhi $m(m^2 + 1) = k^e$ dengan k dan e bulat dan e > 2
Jika diinginkan ada nilai m bilangan asli, maka nilai minimal ruas kiri = 2 yang berarti $k \geq 2$ ...... (1)
Karena persamaan berbentuk $ab = c^d$ dengan a, b, c, d $\in$ Asli, maka a membagi c atau c membagi a.

Alternatif 1 :

* Jika k membagi m
maka $m = p \cdot k^q$ dengan p bukan kelipatan k dan q $\in$ bilangan bulat dan p $\in$ bilangan asli.
Persamaan menjadi $p^3k^{3q} + pk^q = k^e \rightarrow p^3k^{2q} + p = k^{e-q}$ .................. (2)
- Jika e > q
Ruas kanan persamaan (2) adalah sebuah bilangan yang habis dibagi k sedangkan ruas kiri adalah sebuah bilangan yang bersisa p jika dibagi k dengan p bukan bilangan kelipatan k. Maka tanda kesamaan tidak akan mungkin terjadi.
- Jika $e \leq q$
Ruas kanan persamaan (2) bernilai $\leq 1$
Karena $p \geq 1$ dan $k \geq 2$ maka $p^3k^{2q} + p \geq 3$ yang berarti tidak ada nilai p dan k yang memenuhi.

Maka tidak ada nilai m $\in$ bilangan asli yang memenuhi $m(m^2 + 1) = k^e$ dengan k membagi m.

* Jika m membagi k
maka k = rm dengan r $\in$ bilangan asli sebab $k \geq 2$
Persamaan akan menjadi $m(m^2 + 1) = r^em^e \rightarrow m + \frac{1}{m} = r^e m^{e-2}$ ................. (3)
- Jika m = 1
Persamaan (3) menjadi $2 = r^e$. Karena $2 = 2^1$ maka persamaan hanya akan dipenuhi jika r = 2 dan e = 1 yang tidak memenuhi syarat bahwa $e \geq 2$.
- Jika m > 1
Ruas kiri persamaan (3) bukan merupakan bilangan bulat sedangkan ruas kanan merupakan bilangan bulat sebab $e \geq 2$.

Maka tidak ada nilai m $\in$ bilangan asli yang memenuhi $m(m^2 + 1) = k^e$ dengan m membagi k.

$\therefore$ **Terbukti bahwa tidak ada bilangan asli m sehingga terdapat bilangan-bilangan bulat k, e, dengan $e \geq 2$, yang memenuhi $m(m^2 + 1) = k^e$**

Alternatif 2 :

Misalkan $m = p_1^{x1} \cdot p_2^{x2} \cdot p_3^{x3} \cdot \cdots \cdot p_n^{xn}$ untuk suatu bilangan prima $p_1, p_2, p_3, \cdots, p_n$ dan bilangan bulat tak negatif $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$.
maka $m^2 + 1 = (p_1^{x1} \cdot p_2^{x2} \cdot p_3^{x3} \cdot \cdots \cdot p_n^{xn})^2 + 1$
$p_1, p_2, p_3, \cdots, p_n$ semuanya membagi m tetapi $m^2 + 1$ jika dibagi $p_1, p_2, p_3, \cdots, p_n$ amsing-masing akan bersisa 1. Maka m dan $m^2 + 1$ saling relatif prima.
Persamaan pada soal hanya akan terpenuhi jika m dan $m^2 + 1$ memiliki pangkat yang sama.
Misalkan $m = a^e$ dan $m^2 + 1 = b^e = a^{2e} + 1$.
Karena $(a^2 + 1)^e = {}_eC_o a^{2e} + {}_eC_1 a^{2(e-1)} + \cdots + {}_eC_e 1^e = a^{2e} + e \cdot a^{2(e-1)} + \cdots + 1 > a^{2e} + 1 = m^2 + 1$

$(a^2)^e < m^2 + 1 = (a^2)^e + 1 < (a^2 + 1)^e$

Dari ketaksamaan di atas didapat $m^2 + 1$ terletak di antara dua bilangan asli berurutan berpangkat e. Maka tidak mungkin $m^2 + 1$ berbentuk $b^e$.

∴ **Terbukti bahwa tidak ada bilangan asli m sehingga terdapat bilangan-bilangan bulat k, e, dengan $e \geq 2$, yang memenuhi $m(m^2 + 1) = k^e$**

5. Misal $x_{ij}$ adalah jarak titik $P_i$ dan $P_j$ dalam arah sumbu X dan Misal $y_{ij}$ adalah jarak titik $P_i$ dan $P_j$ dalam arah sumbu Y.

Jika $x_{ij}$ dan $y_{ij}$ keduanya genap, maka dapat dipastikan bahwa sekurang-kurangnya satu titik letis selain titik $P_i$ dan $P_j$ akan terletak pada ruas garis $P_iP_j$, yaitu pada pertengahan ruas garis $P_iP_j$ yang akan berjarak $\frac{1}{2}x_{ij}$ pada arah sumbu X dan $\frac{1}{2}y_{ij}$ pada arah sumbu Y terhadap titik $P_i$ maupun $P_j$ dengan $\frac{1}{2}x_{ij}$ dan $\frac{1}{2}y_{ij}$ adalah juga bilangan bulat.

Sifat penjumlahan berikut juga akan mebantu menjelaskan :

Bilangan Genap – Bilangan Genap = Bilangan Genap

Bilangan Ganjil – Bilanagn Ganjil = Bilangan Genap.

Kemungkinan jenis koordinat (dalam bahasa lain disebut paritas) suatu titik letis pada bidang hanya ada 4 kemungkinan yaitu (genap, genap), (genap,ganjil), (ganjil, ganjil) dan (ganjil, genap).

Jika 2 titik letis mempunyai paritas yang sama maka sesuai sifat penjumlahan maka dapat dipastikan kedua titik letis memiliki jarak mendatar dan jarak vertikal merupakan bilangan genap yang berarti koordinat titik tengah dari garis yang menghubungkan kedua titik letis tersebut juga merupakan bilangan genap.

Karena ada 5 titik letis sedangkan hanya ada 4 paritas titik letis maka sesuai *Pigeon Hole Principle* (PHP) maka dapat dipastikan sekurang-kurangnya ada dua titik letis yang memiliki paritas yang sama.

∴ **Dari penjelasan di atas dapat dibuktikan bahwa jika $P_1$, $P_2$, $P_3$, $P_4$, $P_5$ adalah lima titik letis berbeda pada bidang maka terdapat sepasang titik ($P_i$, $P_j$), $i \neq j$, demikian, sehingga ruas garis $P_iP_j$ memuat sebuah titik letis selain $P_i$ dan $P_j$.**