SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2005

TINGKAT PROVINSI TAHUN 2004

Prestasi itu diraih bukan didapat !!!

SOLUSI SOAL

Bidang Matematika

Bagian Pertama

Disusun oleh : Eddy Hermanto, ST

BAGIAN PERTAMA

1. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=10$ → $\frac{x+y}{xy}=10$ → $\frac{40}{xy}=10$

   ∴ xy = 4

2. Keadaan I :
   Misalkan dalam 1 gelas terdapat a bagian sirup maka banyaknya bagian air adalah 4a bagian. Karena dalam satu gelas terdapat a bagian sirup maka dalam satu botol sirup terdapat 60a bagian sirup. Sedangkan dalam 1 gelas terdapat 5a bagian.
   Keadaan II :
   Jika dalam gelas terdapat b bagian sirup, maka banyaknya bagian air adalah 5b bagian. Karena dalam satu gelas terdapat b bagian sirup maka dalam x gelas terdapat bx bagian sirup. Sedangkan dalam 1 gelas terdapat 6b bagian.
   Dari keadaan I dan keadaan II didapat 5a = 6b.
   Misalkan dari campuran tersebut dapat dibuat x gelas, maka :
   bx = 60a = 12 · (6b) → x = 72
   ∴ Banyaknya gelas yang diperoleh adalah **72** gelas

3. Misalkan penduduk Jawa tengah = JT
   Penduduk Jawa = J
   Penduduk Indonesia = I
   JT = 25% J
   JT = 15% I
   25% J = 15% I
   J = 60% I
   Karena penduduk Jawa = 60% penduduk Indonesia maka
   ∴ Penduduk Indonesia yang tinggal di luar pulau Jawa = **40%**

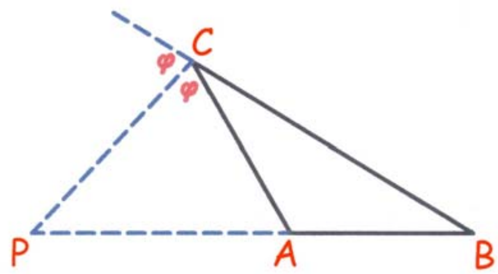
4. Volume seharusnya = $\pi r^2 t$
   Volume perhitungan Dina = $\pi D^2 t = 4\pi r^2 t$
   Rasio perhitungan Dinas terhadap hasil seharusnya = $\frac{4\pi r^2 t}{\pi r^2 t} = 4$
   ∴ Rasio perhitungan Dina terhadap hasil seharusnya = **4**

5. * Karena lingkaran pertama berpusat di kuadran I dan melalui titik (0,0) maka semua titik yang terletak di dalam lingkaran pertama tidak akan mungkin terletak di kuadran III.
   * Karena lingkaran pertama berpusat di kuadran II dan melalui titik (0,0) maka semua titik yang terletak di dalam lingkaran pertama tidak akan mungkin terletak di kuadran IV.
   * Karena lingkaran pertama berpusat di kuadran III dan melalui titik (0,0) maka semua titik yang terletak di dalam lingkaran pertama tidak akan mungkin terletak di kuadran I.

   ∴ Titik P hanya mungkin terletak di **kuadran II.**

6. Jika panjang sisi segitiga adalah k titik maka banyaknya bulatan hitam = 2k − 1.
Pada gambar ke−n panjang sisi segitiga = n + 2 titik.
Banyaknya bulatan hitam = 2(n + 2) − 1 = 2n + 3
∴ Banyaknya bulatan hitam pada gambar ke−n adalah **2n + 3**

7. Karena CP adalah garis bagi maka berlaku AC : CB = PA : PB → $PA = \frac{3}{4}PB$



PB = PA + AB
$\frac{4}{3}$PA = PA + PB → PA + 3 AB
∴ PA : AB = **3 : 1**

8. * Untuk x = 0, maka y + z = 99.
Banyaknya pasangan (y,z) yang memenuhi ada 100 yaitu (0,99), (1,98), (2,97), ···, (99,0)
* Untuk x = 1, maka y + z = 98.
Banyaknya pasangan (y,z) yang memenuhi ada 99 yaitu (0,98), (1,97), (2,96), ···, (98,0)
* Untuk x = 2, maka y + z = 97.
Banyaknya pasangan (y,z) yang memenuhi ada 98 yaitu (0,97), (1,96), (2,95), ···, (97,0)
* Untuk x = 3, maka y + z = 96.
Banyaknya pasangan (y,z) yang memenuhi ada 97 yaitu (0,96), (1,95), (2,94), ···, (96,0)
⋮
* Untuk x = 99, maka y + z = 0
Banyaknya pasangan (y,z) yang memenuhi ada 1 yaitu (0,0)

Banyaknya barisan bilangan bulat (x, y, z) yang memenuhi = 100 + 99 + 98+ ··· + 1 = $\frac{100}{2}(100+1)$
∴ Banyaknya barisan bilangan bulat (x, y, z) yang memenuhi persamaan x + y + z = 99 ada **5050.**

9. n(n − 1)(2n − 1) = n(n − 1)(2n + 2 − 3)
= 2n(n − 1)(n + 1) − 3n(n − 1)
(n − 1), n, (n + 1) adalah 3 bilangan bulat berurutan, maka (n − 1)n(n + 1) habis dibagi 3! = 6.
n(n − 1) juga habis dibagi 2! = 2.
Maka 3n(n − 1) pasti habis dibagi 6.
Akibatnya berapa pun nilai n dengan n ∈ bilangan asli akan memenuhi n(n − 1)(2n − 1) habis dibagi 6.
∴ Himpunan semua n asli sehingga n(n − 1)(2n − 1) habis dibagi 6 adalah **{n|n ∈ bilangan asli}**

10. * Jika $x \le 4$ maka $|2x - 8| = 8 - 2x$

Pertidaksamaan menjadi $x^2 < 89 - 2x$

$(x + 4)(x - 2) < 0$

$-4 < x < 2$

Karena persoalan dibatasi hanya untuk $x \le 4$ maka batas-batas yang memenuhi $-4 < x < 2$

* Jika $x \ge 4$ maka $|2x - 8| = 2x - 8$

Pertidaksamaan menjadi $x^2 < 2x - 8$

$x^2 - 2x + 8 < 0$

$(x - 1)^2 + 7 < 0$

Ruas kiri adalah definit positif sehingga tidak ada penyelesaian x yang memenuhi.

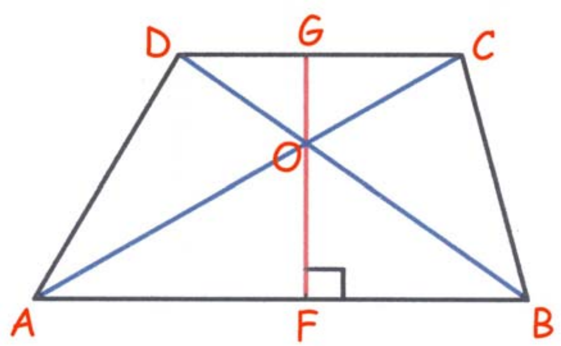
∴ Penyelesaian x yang memenuhi pertidaksamaan $x^2 < |2x - 8|$ adalah $\mathbf{-4 < x < 2}$

11. Banyaknya pasangan kartu yang jumlahnya 6 ada 2 yaitu (1,5) dan (2,4)

Peluang terambilnya 2 kartu yang jumlahnya nomornya 6 adalah $\frac{2}{{}_6C_2}$

∴ Peluang terambilnya 2 kartu yang jumlah nomornya 6 adalah $\frac{2}{15}$

12.



Misal $\angle ACD = \alpha$ maka $\angle GOD = \angle CAB = \angle BOF = \alpha$

$\sin\alpha = \frac{CE}{CA} = \frac{FG}{CA} = \frac{4}{5}$ ······· (1) → $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ ······· (2) ; $\tan\alpha = \frac{4}{3}$ ······· (3)

Misal CO = a dan GO = b maka OA = 5 − a dan OF = 4 − b sebab FG adalah tinggi trapesium.

$GC = CO\cos\alpha = \frac{3}{5}a$

$DG = GO\tan\alpha = \frac{4}{3}b$

$DC = DG + GC = \frac{3}{5}a + \frac{4}{3}b$ ··············· (4)

$AF = OA\cos\alpha = (5 - a)\,\frac{3}{5} = 3 - \frac{3}{5}a$

FB = OF tan α = (4 − b) $\frac{4}{3}$ = $\frac{16}{3}$ − $\frac{4}{3}$b

AB = AF + FB = 3 − $\frac{3}{5}$a + $\frac{16}{3}$ − $\frac{4}{3}$b = $\frac{25}{3}$ − $\frac{3}{5}$a − $\frac{4}{3}$b

Luas trapesium = $\frac{1}{2}(DC + AB)FG$

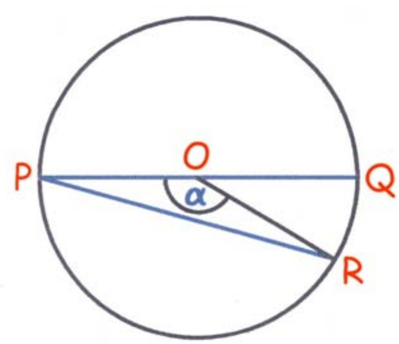
Dari persamaan (4) dan (5) didapat luas trapesium = $\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{25}{3}\right)\cdot 4 = \frac{50}{3}$

∴ Luas trapesium = $\frac{50}{3}$

13. $\left(1-\frac{2}{3}\right)\left(1-\frac{2}{5}\right)\left(1-\frac{2}{7}\right)\cdots\left(1-\frac{2}{2005}\right) = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{7}\cdot\cdots\cdot\frac{2003}{2005}$

∴ $\left(1-\frac{2}{3}\right)\left(1-\frac{2}{5}\right)\left(1-\frac{2}{7}\right)\cdots\left(1-\frac{2}{2005}\right) = \frac{1}{2005}$

14. Karena Tini lebih lambat dari Santi maka panjang busur yang ditempuhnya akan lebih pendek dari yang ditempuh Santi.



Misal panjang busur yang ditempuh Tini = a maka panjang busur yang ditempuh Santi = $\frac{3}{2}$a.

a + $\frac{2}{5}$a = K dengan K adalah keliling lingkaran.

a = $\frac{3}{2}$K

$\frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{a}{K} = \frac{2}{5}$

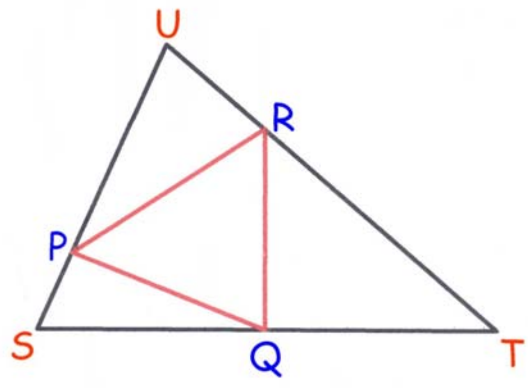
α = 144°

Karena O adalah pusat lingkaran maka ΔOPR adalah segitiga sama kaki.

∠RPO = ∠RPQ = $\frac{1}{2}$(180° − 144°)

∴ ∠RPQ = 18°

15.



Misal panjang sisi TU = a, SU = b dan ST = c serta ∠UST = α, ∠STU = β dan ∠TUS = γ, maka :

Luas ΔSTU = $\frac{1}{2}$ab sin γ = $\frac{1}{2}$ac sin β = $\frac{1}{2}$bc sin α = 1

$$\text{Luas } \Delta SPQ = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}b\right)\left(\frac{1}{2}c\right)\sin\alpha = \frac{1}{8}\text{ Luas } \Delta STU = \frac{1}{8}$$

$$\text{Luas } \Delta TQR = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}a\right)\left(\frac{1}{2}c\right)\sin\beta = \frac{1}{3}\text{ Luas } \Delta STU = \frac{1}{3}$$

$$\text{Luas } \Delta UPR = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}a\right)\left(\frac{3}{4}b\right)\sin\gamma = \frac{1}{4}\text{ Luas } \Delta STU = \frac{1}{4}$$

Luas ΔPQR = Luas ΔSTU − Luas ΔSPQ − Luas ΔTQR − Luas ΔUPR = $1-\frac{1}{8}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$

∴ Luas ΔPQR = $\frac{7}{24}$

16. $\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right) = 1 \rightarrow x+\sqrt{x^2+1} = \frac{1}{y+\sqrt{y^2+1}}$ .... (1)

$$\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)\left(y-\sqrt{y^2+1}\right) = \left(x-\sqrt{x^2+1}\right)\left(y-\sqrt{y^2+1}\right)$$

$$(-1)(-1) = \left(x-\sqrt{x^2+1}\right)\left(y-\sqrt{y^2+1}\right)$$

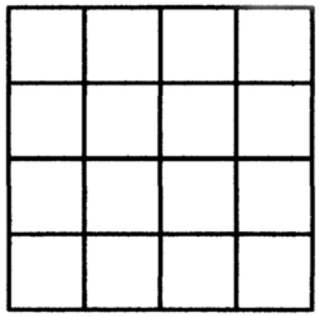
$x-\sqrt{x^2+1} = \frac{1}{y-\sqrt{y^2+1}}$ .... (2)

(1) + (2) → $2x = \frac{1}{y+\sqrt{y^2+1}} + \frac{1}{y-\sqrt{y^2+1}} = \frac{2y}{(-1)}$

−x = y

∴ x + y = 0

17. Pada sebuah persegi dengan panjang sisi = a, jarak terjauh dua titik yang terletak pada persegi adalah $a\sqrt{2}$ jika kedua titik merupakan ujung-ujung diagonal bidang persegi tersebut.



Bagi persegi dengan panjang sisi 2 tersebut menjadi 16 persegi dengan panjang sisi masing-masing $= \frac{1}{2}$ sehingga jarak terjauh 2 titik yang terletak pada masing-masing persegi adalah $\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Jika terdapat 16 titik, maka titik-titik tersebut masih dapat didistribusikan masing-masing 1 titik yang terletak di dalam persegi kecil sehingga masih belum dapat dijamin senantiasa terambil dua titik yang jarak antara keduanya $\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Jika terdapat 17 titik maka sesuai *Pigeon Hole Principle* maka sekurang-kurangnya ada satu persegi kecil berisi sekurang-kurangnya 2 titik sehingga dapat dijamin senantiasa terambil dua titik yang jarak antara keduanya $\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

$\therefore$ Jumlah minimal titik yang harus diambil dari dalam sebuah persegi dengan panjang sisi 2 agar dapat dijamin senantiasa terambil dua titik yang jarak antara keduanya $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ adalah 17.

18. $f(x)f(y) - f(xy) = x + y$

* Jika x = 0 dan y = 0, maka $f(0)f(0) - f(0) = 0 \rightarrow f(0)(f(0) - 1) = 0 \rightarrow f(0) = 0$ atau $f(0) = 1$
* Jika x = 1 dan y = 0, maka $f(1)f(0) - f(0) = 1$
  - Jika $f(0) = 0$, maka $0 = 1$ yang berarti tidak mungkin $f(0) = 0$ maka $f(0) = 1$
  - Untuk $f(0) = 1$ maka $f(1) - 1 = 1 \rightarrow f(1) = 2$
* Jika x = 2004 dan y = 1 maka $f(2004)f(1) - f(2004) = 2005$

  $2f(2004) - f(2004) = 2005 \rightarrow f(2004) = 2005$
* Jika x = 2004 dan y = 0 maka $f(2004)f(0) - f(0) = 2004$

  $f(2004) - 1 = 2004 \rightarrow f(2004) = 2005$

$\therefore$ $f(2004) = 2005$

19. $\text{fpb}(a_1, a_2, a_3) = 1$.

Karena $\text{fpb}(a_i, a_j) > 1$ untuk $i \neq j$, i, j = 1, 2, 3 maka a_i dan a_j untuk $i \neq j$, i, j = 1, 2, 3 tidak saling prima relatif. Misalkan $\text{fpb}(a_1, a_2) = q$, $\text{fpb}(a_1, a_3) = p$ dan $\text{fpb}(a_1, a_2) = r$ dengan p, q, r > 1.

Maka a_i dengan i = 1, 2, 3 akan berbentuk :

$$a_1 = pq$$
$$a_2 = qr$$
$$a_3 = pr$$

p dan q, q dan r, p dan r masing-masing saling prima relatif.

3 bilangan terkecil (p, q, r) yang memenuhi adalah (2, 3, 5) sehingga $a_1 = 2 \cdot 3 = 6$, $a_2 = 2 \cdot 5 = 10$ dan $a_3 = 3 \cdot 5 = 15$.

$\therefore$ Agar $a_1 + a_2 + a_3$ minimal maka $(a_1, a_2, a_3) = (6, 10, 15)$

20. a o b = a + b + ab

$c = a + b + ab \rightarrow 67 = a + b + ab$

$67 = (a + 1)(b + 1) - 1 \rightarrow (a + 1)(b + 1) = 68$

Faktor yang sebenarnya dari 68 adalah 1, 2, 4, 17, 34 dan 68

Jika a + 1 = 1 maka a = 0 Jika a + 1 = 2 maka a = 1 Jika a + 1 = 4 maka a = 3

Jika a + 1 = 17 maka a = 16 Jika a + 1 = 34 maka a = 33 Jika a + 1 = 68 maka a = 67

$\therefore$ *faktor* positif dari 67 adalah 1, 3, 16, 33 dan 67